ԵՐԵՎԱՆԻ ՊԵՏԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆ

Կազմված է ԻԿՄ ֆակուլտետի
Թվային անալիզի և մաթեմատիկական մոդելավորման ամբիոնի
դոցենտ **Երվանդ Մկրտչյանի**
դասախոսությունների հիման վրա

Կոմպլեքս անալիզ

(դասախոսություններ)

Ուսանողներ՝
Մերի Մարգարյան
Սյունե Շաքարյան

Երևան 2026

Կոմպլեքս անալիզ

1 Կոմպլեքս թվեր և գործողություններ դրանց հետ:

Դիտարկենք XOY հարթությունը: Մեր նպատակն է, այս հարթության կետերի միջև սահմանել թվային գործողություններ:

Սահմանում (1). $(x_1, y_1) \pm (x_2, y_2) = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2)$

Սահմանում (2). $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2, x_1 \cdot y_2 + y_1 \cdot x_2)$

Սահմանում (3). $(x_1, y_1)/(x_2, y_2) = (a, b)$, *որտեղ* $(x_1, y_1) = (a, b) \cdot (x_2, y_2)$*: Կստացվի սովորական գծային հավասարումների համակարգ.*

$$\begin{cases} x_1 = ax_2 - by_2 \\ y_1 = ay_2 + bx_2 \end{cases} \implies a = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}, \quad b = \frac{x_2y_1 - y_2x_1}{x_2^2 + y_2^2} :$$

Եթե դիտարկենք միայն OX առանցքի վրայի կետերը, ապա այս գործողությունները դառնում են թվաբանական գործողություններ իրական թվերի համար: $(a, 0)$ և $(b, 0)$ կետերի համար կունենանք.

$$(a, 0) \pm (b, 0) = (a \pm b, 0), \quad (a, 0) \cdot (b, 0) = (ab - 0 \cdot 0, a \cdot 0 + b \cdot 0) = (ab, 0)$$

և

$$(a, 0)/(b, 0) = \left(\frac{ab + 0}{b^2}, \frac{b \cdot 0 - 0 \cdot a}{b^2} \right) = (a/b, 0)$$

$\implies$ ճիշտ կլինի հետևյալ գրառումը. $(5, 0) = 5, (a, 0) = a$:
Նկատենք, որ $(0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (0 - 1, 0) = (-1, 0) = -1$: $(0, 1)$ կետը կնշանակենք i-ով: Նկատենք, որ $bi = (b, 0) \cdot (0, 1) = (b \cdot 0 - 0 \cdot 1, b \cdot 1 + 0 \cdot 0) = (0, b)$: Ակնհայտ է նաև, որ $(a, b) = (a, 0) + (0, b) = a + (0, b) \implies (a, b) = a + ib$:

Սահմանում. *Նշանակենք* $z = a+ib$*:* z*-ը կոչվում է կոմպլեքս թիվ, իսկ* $\bar{z} = a-ib$ *կոմպլեքս թիվը կոչվում է* z*-ի համալուծ:*

Հեշտ է տեսնել, որ $(a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd = ac - bd + i(ad + bc)$:

- $z \cdot \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$
- $\frac{a+ib}{c+id} = \frac{(a+ib)(c-id)}{(c+id)(c-id)} = \frac{ac+bd+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$

Սահմանում. OY *առանցքը կոչվում է կեղծ առանցք, իսկ* OX*-ը՝ իրական առանցք: Եթե* $z = a + ib$*, ապա* a*-ն կոչվում է իրական մաս՝* $a = \operatorname{Re} z$*, իսկ* b*-ն՝ կեղծ մաս՝* $b = \operatorname{Im} z$*:*

2 Կոմպլեքս թվի եռանկյունաչափական և ցուցչային տեսքը:

Դիցուք $z = a + ib$: Նշանակենք $|z| = \rho = \sqrt{a^2 + b^2}$:

Սահմանում. ρ*-ն կոչվում է* z*-ի մոդուլ (երկարություն), իսկ* φ*-ն արգումենտ:*

Տրված ρ-ով և φ-ով կոմպլեքս թիվը միակն է: Կօգտագործենք $\varphi = \arg z$ նշանակումը, իսկ Արգz-ով՝ z-ին համապատասխան բոլոր անկյունների բազմությունը՝
$-\pi + 2\pi k <$ Արգ$z \leq \pi + 2\pi k, k = 0, \pm 1, \ldots$:
Ակնհայտ է, որ

$$\begin{cases} a = \rho \cos \varphi \\ b = \rho \sin \varphi \end{cases} \implies z = a + ib = \rho \cos \varphi + i\rho \sin \varphi = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Սահմանում. $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ *տեսքով գրված կոմպլեքս թիվը ներկայացված է եռանկյունաչափական տեսքով:*

Դիցուք $z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$: Նշանակենք $\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$: Այդ դեպքում կստացվի, որ $z = \rho \cdot e^{i\varphi}$: Այս տեսքը կոչվում է կոմպլեքս թվի ասպիճանային տեսք (կամ ցուցչային):

3 Թեորեմ կոմպլեքս թվի արգումենտի և մոդուլի վերաբերյալ:

Թեորեմ 1. *Դիցուք 2 կոմպլեքս թվեր գրված են եռանկյունաչափական տեսքով և բազմապատկված են իրար: Այդ դեպքում նրանց մոդուլները բազմապատկվում են, իսկ արգումենտները՝ գումարվում:*

Ապացույց. $z_1 = \rho_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = \rho_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \implies$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= \rho_1 \cdot \rho_2(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)) \\ &= \rho_1\rho_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)) \end{aligned}$$

Այսպեղից հետևում է, որ $z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$:

$$\frac{1}{z_2} = \frac{\bar{z}_2}{\rho_2^2} = \frac{\rho_2(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{\rho_2^2} = \frac{1}{\rho_2}(\cos(-\varphi_2) + i\sin(-\varphi_2))$$

$$\implies \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2))$$

4 Կոմպլեքս թվերի հաջորդականություններ և շարքեր

Սահմանում. *Կասենք, որ $z_1, z_2, \dots, z_n, \dots$ կոմպլեքս թվերի հաջորդականությունը ունի սահման և ձգտում է a կոմպլեքս թվին, երբ $n \to \infty$ ($\lim_{n\to\infty} z_n = a$), եթե $\forall\varepsilon > 0$ թվի համար $\exists N = N(\varepsilon) > 0$, այնպես որ $\forall n > N \implies |z_n - a| < \varepsilon$:*

Դիցուք $z_n = x_n + iy_n$ և $a = x_0 + iy_0 \implies$

$$|z_n - a| = |(x_n - x_0) + i(y_n - y_0)| = \sqrt{(x_n-x_0)^2 + (y_n-y_0)^2} < \varepsilon$$

Դիտարկենք բոլոր (x, y) կետերը, որոնք բավարարում են $\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \varepsilon$ անհավասարմանը: Դրանք բոլոր այն կետերն են, որոնք ընկած են a կենտրոնով և ε շառավղով շրջանի մեջ: Ստացվում է, որ սահմանմանը համարժեք է նրան որ եթե a-ն z_n-ի սահմանն է, ապա a-ի կամայական ε շրջակայքում կան $\{z_n\}$-ի անվերջ քանակությամբ անդամներ, իսկ դրանից դուրս՝ վերջավոր:

Թեորեմ 2. *Ունենք $z_n = x_n + iy_n$: Որպեսզի $z_n \to a$, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\operatorname{Re} z_n = x_n \to x_0$ և $\operatorname{Im} z_n = y_n \to y_0$, որտեղ $a = x_0 + iy_0$:*

Ապացույց. ($\implies$) Ունենք, որ $\forall\varepsilon > 0$ թվի համար $\exists N = N(\varepsilon) > 0$, այնպես որ $\forall n > N \implies$

$$\varepsilon > |z_n - a| = \sqrt{(x_n-x_0)^2 + (y_n-y_0)^2} \geq |x_n - x_0| \implies x_n \to x_0$$

և

$$\sqrt{(x_n-x_0)^2 + (y_n-y_0)^2} \geq |y_n - y_0| \implies y_n \to y_0$$

($\impliedby$) Ունենք, որ $x_n \to x_0$ և $y_n \to y_0 \implies \forall\varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) > 0$, այնպես որ $\forall n > N \implies$ $|x_n - x_0| < \varepsilon/\sqrt{2}$ և $|y_n - y_0| < \varepsilon/\sqrt{2}$:

$$|z_n - z_0| = \sqrt{(x_n-x_0)^2 + (y_n-y_0)^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon$$

Վայերշտրասի թեորեմ (Բոլցանո-Վայերշտրաս): Եթե $\{z_n\}$-ը սահմանափակ հաջորդականություն է, ապա $\exists\{z_{n_k}\}$ ենթահաջորդականություն, որն ունի վերջավոր սահման:

Ապացույց. Քանի որ $\{z_n\}$ հաջորդականությունը սահմանափակ է, ապա գոյություն ունի $M > 0$ թիվ, այնպես որ բոլոր n-ների համար $|z_n| \leq M$: Նշանակենք $z_n = x_n + iy_n$: Հաշվի առնելով կոմպլեքս թվի մոդուլի հատկությունները՝ ունենք.

$$|x_n| \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = |z_n| \leq M$$

$$|y_n| \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = |z_n| \leq M$$

Ստացանք, որ $\{x_n\}$ և $\{y_n\}$ իրական թվերի հաջորդականությունները սահմանափակ են:
Կիրառենք իրական թվերի համար Բոլցանո-Վայերշտրասի թեորեմը $\{x_n\}$ հաջորդականության նկատմամբ: Համաձայն թեորեմի, $\{x_n\}$-ից կարելի է անջատել զուգամետ $\{x_{n_k}\}$ ենթահաջորդականություն, որը ձգտում է որևէ x_0 իրական թվի ($x_{n_k} \to x_0$):
Այժմ դիտարկենք այդ ինդեքսներին համապատասխանող կեղծ մասերի՝ $\{y_{n_k}\}$ հաջորդականությունը:
Քանի որ $\{y_n\}$-ը սահմանափակ էր, ապա $\{y_{n_k}\}$ ենթահաջորդականությունը նույնպես սահմանափակ է: Կրկին կիրառելով Բոլցանո-Վայերշտրասի թեորեմը, այս անգամ $\{y_{n_k}\}$-ի նկատմամբ, կարող ենք անջատել նրանից զուգամետ ենթահաջորդականություն (ենթա-ենթահաջորդականություն), որը նշանակենք $\{y_{n_{k_m}}\}$, և որը ձգտում է որևէ y_0 իրական թվի ($y_{n_{k_m}} \to y_0$):
Նկատենք, որ համապատասխան իրական մասերի $\{x_{n_{k_m}}\}$ հաջորդականությունը հանդիսանում է $\{x_{n_k}\}$ զուգամետ հաջորդականության ենթահաջորդականություն, հետևաբար այն նույնպես զուգամետ է և ձգտում է նույն x_0 սահմանին ($x_{n_{k_m}} \to x_0$):
Վերջապես, դիտարկենք $\{z_{n_{k_m}}\}$ կոմպլեքս թվերի ենթահաջորդականությունը: Քանի որ նրա իրական մասը ձգտում է x_0-ի, իսկ կեղծ մասը՝ y_0-ի, ապա համաձայն նախորդ թեորեմի (որ կոմպլեքս հաջորդականության զուգամիտությունը համարժեք է իրական և կեղծ մասերի զուգամիտությանը)՝

$$z_{n_{k_m}} \to a = x_0 + iy_0 :$$

Այսպիսով, մենք կառուցեցինք սկզբնական հաջորդականության զուգամետ ենթահաջորդականություն:

Կոշի զուգամիտության սկզբունքը (հաջորդականությունների համար): Որպեսզի $\{z_n\}$ հաջորդականությունն ունենա վերջավոր սահման անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\forall\varepsilon > 0$-ի համար $\exists N = N(\varepsilon)$, այնպես որ $\forall n \geq N$ և $\forall p = 1, 2, \cdots \implies |z_{n+p} - z_n| < \varepsilon$:

Ապացույց. ($\implies$) **Անհրաժեշտություն:** Ենթադրենք $\{z_n\}$ հաջորդականությունը զուգամետ է և $\lim_{n\to\infty} z_n = a$: Ըստ սահմանման՝ $\forall\varepsilon > 0$ թվի համար $\exists N$, որ $\forall n \geq N \implies |z_n - a| < \varepsilon/2$: Դիտարկենք կամայական $p \geq 1$: Քանի որ $n + p > n \geq N$, ապա $|z_{n+p} - a| < \varepsilon/2$: Կիրառելով եռանկյան անհավասարությունը՝ ստանում ենք.

$$|z_{n+p} - z_n| = |(z_{n+p} - a) - (z_n - a)| \leq |z_{n+p} - a| + |z_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

($\Longleftarrow$) **Բավարարություն:** Ենթադրենք տեղի ունի Կոշիի պայմանը՝ $|z_{n+p} - z_n| < \varepsilon$: Նշանակենք $z_n = x_n + iy_n$: Օգտվելով անհավասարություններից՝

$$|x_{n+p} - x_n| \leq |z_{n+p} - z_n| < \varepsilon$$

$$|y_{n+p} - y_n| \leq |z_{n+p} - z_n| < \varepsilon$$

Ստանում ենք, որ $\{x_n\}$ և $\{y_n\}$ իրական թվերի հաջորդականությունները բավարարում են Կոշիի պայմանին իրական առանցքի վրա: Համաձայն իրական թվերի համար Կոշիի զուգամիտության սկզբունքի (լրիվության)՝ այդ հաջորդականությունները զուգամետ են: Դիցուք $x_n \to x_0$ և $y_n \to y_0$: Այդ դեպքում, համաձայն կոմպլեքս հաջորդականության զուգամիտության թեորեմի (առաջին թեորեմ), z_n հաջորդականությունը զուգամետ է և ձգտում է $a = x_0 + iy_0$ թվին:

Դիտարկենք $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ գումարը և $S_n = z_1 + \cdots + z_n$ հաջորդականությունը:

Սահմանում. *Եթե գոյություն ունի* $\lim_{n\to\infty} S_n$ *սահմանը, ապա այն կոչվում է* $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ *շարքի գումար:*

Կոշի զուգամիտության սկզբունքը (շարքերի համար): Որպեսզի $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ շարքը լինի զուգամետ անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\forall\varepsilon > 0$ թվի համար $\exists N = N(\varepsilon) > 0$, այնպես որ $\forall n > N$ և $\forall p = 1, 2, \cdots \implies |z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+p}| < \varepsilon$:

Ապացույց. Շարքի զուգամիտությունը սահմանվում է որպես նրա մասնակի գումարների $S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k$ հաջորդականության զուգամիտություն: Կիրառենք Կոշիի զուգամիտության սկզբունքը $\{S_n\}$ հաջորդականության համար: Համաձայն այդ սկզբունքի, $\{S_n\}$-ը զուգամետ է այն և միայն այն դեպքում, երբ $\forall \varepsilon > 0, \exists N$, որ $\forall n > N$ և $p \geq 1$՝

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$$

Հաշվի առնելով մասնակի գումարների տեսքը՝ գրենք տարբերությունը.

$$S_{n+p} - S_n = (z_1 + \cdots + z_n + z_{n+1} + \cdots + z_{n+p}) - (z_1 + \cdots + z_n) = z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+p}$$

Հետևաբար, պայմանը դառնում է.

$$|z_{n+1} + z_{n+2} + \cdots + z_{n+p}| < \varepsilon$$

Ինչը և պահանջվում էր ապացուցել:

Սահմանում. *$\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ շարքը կոչվում է բացարձակ զուգամետ, եթե զուգամետ է $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ շարքը: Ակնհայտ է, որ եթե $\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ շարքը զուգամետ է, ապա $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ շարքը զուգամետ է (սա հետևում է Կոշիի սկզբունքից և $|z_{n+1}+\cdots+z_{n+p}| \leq |z_{n+1}|+\cdots+|z_{n+p}|$ անհավասարությունից):*

5 Կորեր և տիրույթներ Կոմպլեքս հարթությունում:

Դիտարկենք կոր xOy հարթության վրա.

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad \text{որտեղ } \alpha \leq t \leq \beta :$$

Սահմանում. *Կորը անընդհատ է, եթե $x(t)$-ն և $y(t)$-ն անընդհատ են:*

Սահմանում. *Կորը ողորկ է, եթե $x(t)$-ն և $y(t)$-ն ունեն անընդհատ ածանցյալներ այնպիսին որ $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0$, երբ $t \in [\alpha, \beta]$:*

Սահմանում. *Կորը պարզ է, եթե այն կտոր-առ-կտոր ողորկ է և ինքնահատում չունի:*

Սահմանում. *Կորը փակ է, եթե կտոր-առ-կտոր ողորկ է, ինքնահատում չունի և*

$$\begin{cases} x(\alpha) = x(\beta) \\ y(\alpha) = y(\beta) \end{cases}$$

Սահմանում. *D տիրույթի բոլոր սահմանային կետերը միացնելու դեպքում, կստանանք փակ բազմություն կամ փակ տիրույթ՝ $\bar{D}$: $\bar{D} = D \cup \partial D$, որտեղ ∂D-ն D-ի եզրն է:*

6 Աբելի և Դիրիխլեի թեորեմները:

Թեորեմ 3 (Աբելի). *Եթե $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ իրական թվերի հաջորդականությունը մոնոտոն է և սահմանափակ, իսկ $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k$ զուգամետ է, ապա $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cdot \beta_k$ շարքը զուգամետ է:*

Թեորեմ 4 (Դիրիխլեի). *Եթե $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ իրական թվերի հաջորդականությունը մոնոտոն է և ձգտում է 0-ի ($\alpha_k \downarrow 0$), իսկ $\beta_k = \sum_{i=1}^{k} \beta_i$ մասնակի գումարների հաջորդականությունը սահմանափակ, ապա $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \cdot \beta_k$ զուգամետ է:*

7 Կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիայի հասկացությունը, սահմանը, անընդհատությունը

Դիտարկենք Կոմպլեքս հարթությունում՝ $\mathbb{C}$-ում որևէ D տիրույթ և դրա վրա որոշված երկու ֆունկցիաներ

$$\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

$\forall$ ֆիքսված $(x, y) \in D$ զույգի համար կստանանք հետևյալ կոմպլեքս թիվը. $u(x, y) + iv(x, y) \equiv f(z)$, որտեղ $z = x + iy$: Այս ֆունկցիան կոմպլեքս ֆունկցիա է ըստ z փոփոխականի D տիրույթում:

Սահմանում. *$f(z)$ ֆունկցիան կոչվում է միաթերթ, եթե $\forall z_1, z_2$ $(z_1 \neq z_2)$ կոմպլեքս թվերի համար, որոնք պատկանում են D տիրույթին՝ $f(z_1) \neq f(z_2)$:*

Եթե $f(z) \in \Omega$ և $z \in D$, ապա ստանում ենք $f : D \to \Omega$ արտապատկերում:

Պնդում. *Եթե արտապատկերումը փոխմիարժեք է, ապա գոյություն ունի $f(z)$ ֆունկցիայի հակադարձ ֆունկցիա՝ $z = \varphi(w)$, որտեղ $f(z) = w$:*

Սահմանում. *Կասենք $f(z)$-ի սահմանը A կոմպլեքս թիվն է երբ z-ը մնալով D-ում ձգտում է z_0-ին, եթե $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, այնպես որ $\forall z \in D$-ի համար, երբ $0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z) - A| < \varepsilon$:*

$\sqrt{(u(x, y) - a)^2 + (v(x, y) - b)^2} < \varepsilon$, այսինքն $f \to A$ երբ $z \to z_0$ համարժեք է նրան, որ $u(x, y) \to a$ և $v(x, y) \to b$, երբ $z \to z_0$:

Սահմանում. *Կասենք, որ $f(z) \to \infty$, երբ $z \to z_0$, եթե $\forall E > 0$ թվի համար $\exists \delta = \delta(E) > 0$, այնպես որ $\forall z \in D$-ի համար բավարարող $0 < |z - z_0| < \delta \implies |f(z)| > E$:*

Կոշի զուգամիտության հայտանիշը: Որպեսզի $f(z)$ որոշված D-ում ունենա վերջավոր սահման, երբ $z \to z_0$, անհրաժեշտ է և բավարար, որ $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, այնպես որ $\forall z', z''$ կետերի համար, որոնց դեպքում

$$\begin{cases} 0 < |z' - z_0| < \delta \\ 0 < |z'' - z_0| < \delta \end{cases} \implies |f(z') - f(z'')| < \varepsilon :$$

Ապացույց. ($\implies$) **Անհրաժեշտություն:** Ենթադրենք $\lim_{z \to z_0} f(z) = A$: Համաձայն սահմանման՝ $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\exists \delta > 0$, որ $0 < |z - z_0| < \delta$ պայմանին բավարարող կետերում $|f(z) - A| < \varepsilon/2$: Եթե վերցնենք z', z'' կետեր նշված δ շրջակայքից, ապա կիրառելով մոդուլի հատկությունները (եռանկյան անհավասարություն), կստանանք.

$$|f(z') - f(z'')| = |(f(z') - A) - (f(z'') - A)| \leq |f(z') - A| + |f(z'') - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

($\Longleftarrow$) **Բավարարություն:** Ենթադրենք տեղի ունի թեորեմի պայմանը: Նշանակենք $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ և $z = x + iy$: Հայտնի է, որ կոմպլեքս թվի իրական և կեղծ մասերի մոդուլները չեն գերազանցում թվի մոդուլը, հետևաբար.

$$|u(x', y') - u(x'', y'')| \leq |f(z') - f(z'')| < \varepsilon$$

$$|v(x', y') - v(x'', y'')| \leq |f(z') - f(z'')| < \varepsilon$$

Ստացանք, որ $u(x, y)$ և $v(x, y)$ իրական փոփոխականի իրական ֆունկցիաները բավարարում են Կոշիի զուգամիտության պայմանին (երբ $(x, y) \to (x_0, y_0)$): Համաձայն մաթեմատիկական անալիզից հայտնի թեորեմի՝ գոյություն ունեն դրանց վերջավոր սահմանները.

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) = a, \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y) = b$$

Հետևաբար, գոյություն ունի նաև $f(z)$-ի սահմանը, երբ $z \to z_0$, և այն հավասար է $A = a + ib$:

Սահմանում. *Կասենք $f(z)$-ը անընդհատ ֆունկցիա է z_0 կետում, եթե $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$, $z_0 \in D$, կամ որ նույնն է $\forall\varepsilon > 0$ թվի համար $\exists\delta > 0$, այնպես որ $\forall z \in D$ և $|z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$:*

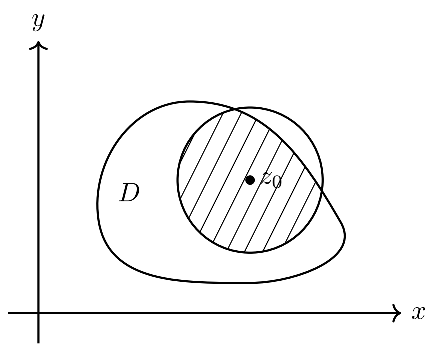
Անընդհատությունը և սահմանը կարող ենք սահմանել նաև ըստ Հայնեի:

Սահմանում (Հայնե). *Կասենք $f(z) \to A$, երբ $z \to z_0$ եթե $\forall\{z_n\} \in D, z_n \neq z_0$ և $\{z_n\} \to z_0$ հաջորդականության համար $f(z_n) \to A$: Կասենք $f(z)$-ը անընդհատ է $z_0 \in D$-ում, եթե $\forall\{z_n\} \in D, z_n \neq z_0$ և $\{z_n\} \to z_0$ հաջորդականության համար $f(z_n) \to f(z_0)$:*

Կոշի և Հայնեի սահմանումները համարժեք են:

Սահմանում. *Եթե $f(z)$-ը անընդհատ է D-ի կամայական կետում, ապա $f(z)$-ը անընդհատ է D-ում:*

Դիտարկենք $\bar{D}$-ն: $f(z)$-ը անընդհատ է $z_0 \in \bar{D}$ կետում, եթե $\forall\varepsilon > 0$ թվի համար $\exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, այնպես որ $\forall z \in \bar{D}$-ի համար բավարարող $|z - z_0| < \delta \implies |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$:



8 Անալիտիկ ֆունկցիաներ:

D տիրույթում դիտարկենք $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ֆունկցիան:

Սահմանում. *Եթե $\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ սահմանը գոյություն ունի և վերջավոր է, ապա այն կոչվում է $f(z)$-ի ածանցյալ z_0 կետում և նշանակում ենք $f'(z_0)$: Ֆունկցիան այդ կետում կոչվում է դիֆերենցելի:*

Սահմանում. *Եթե $f(z)$-ը դիֆերենցելի է D տիրույթի բոլոր կետերում, ապա այն կոչվում է անալիտիկ ֆունկցիա:*

Թեորեմ 5. *Տրված է $f(z)$ ֆունկցիան որոշված D տիրույթում, և $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$: Որպեսզի $f(z)$-ը լինի դիֆերենցելի $z_0 \in D$ կետում, անհրաժեշտ է և բավարար, որ*

1. *$u(x, y)$ և $v(x, y)$ ֆունկցիաները որպես իրական ֆունկցիաներ լինեն դիֆերենցելի z_0 կետում:*

2. $$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

   սա կոչվում է Կոշի-Ռիմանի պայմաններ:

Ապացույց. ($\implies$) Ունենք, որ $f(z)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է z_0 կետում $\implies \exists f'(z_0) = \lim \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ սահմանը: $f'(z_0) = \alpha + i\beta \implies$ կարող ենք գրել, որ $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \alpha + i\beta + \varepsilon(z)$, որտեղ $\varepsilon(z) \to 0$ երբ $z \to z_0$:

$$\begin{aligned} f(z) - f(z_0) &= u(x,y) - u(x_0,y_0) + i(v(x,y) - v(x_0,y_0)) \\ z - z_0 &= x - x_0 + i(y - y_0) = \Delta x + i\Delta y \\ \varepsilon(z) &= \varepsilon_1(x,y) + i\varepsilon_2(x,y) \\ f(z) - f(z_0) &= \Delta u + i\Delta v = (\alpha + i\beta)(\Delta x + i\Delta y) + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_2)(\Delta x + i\Delta y) \\ &= \alpha\Delta x - \beta\Delta y + \varepsilon_1\Delta x - \varepsilon_2\Delta y + i(\beta\Delta x + \alpha\Delta y) + i(\varepsilon_2\Delta x + \varepsilon_1\Delta y) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \Delta u = \alpha\Delta x - \beta\Delta y + \varepsilon_1\Delta x - \varepsilon_2\Delta y \\ \Delta v = \beta\Delta x + \alpha\Delta y + \varepsilon_2\Delta x + \varepsilon_1\Delta y \end{cases}$$

Երկուսն էլ գրված են լրիվ դիֆերենցիալի տեսքով $\implies$ $u(x,y)$ և $v(x,y)$ ֆունկցիաները դիֆերենցելի են:
Այժմ ապացուցենք, որ տեղի ունեն Կոշի-Ռիմանի պայմանները: Վերևում ստացված համակարգից ստանում ենք, որ $\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}$ և $\alpha = \frac{\partial v}{\partial y}$ $\implies$ $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$: Ինչպես նաև $\beta = -\frac{\partial u}{\partial y}$ և $\beta = \frac{\partial v}{\partial x}$ $\implies$ Տեղի ունեն Կոշի-Ռիմանի պայմանները:

Մաթեմատիկական անալիզից հիշեցնենք հետևյալ սահմանումը և պնդումը.

Սահմանում. *Կասենք $u = f(x_1,\ldots,x_k)$ ֆունկցիան դիֆերենցելի է $(x_1^0,\ldots,x_k^0)$ կետում, եթե $\Delta u = f(x_1^0 + \Delta x_1,\ldots,x_k^0 + \Delta x_k) - f(x_1^0,\ldots,x_k^0)$ լրիվ աճը կարելի է ներկայացնել այսպես. $\Delta u = A_1\Delta x_1 + A_2\Delta x_2 + \cdots + A_k\Delta x_k + \alpha_1\Delta x_1 + \cdots + \alpha_k\Delta x_k$, որտեղ A_i-ն հաստատուն է ($A_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}|_{z_0}$), իսկ α_i-ն անվերջ փոքր է, երբ $\Delta x_1 \to 0,\ldots,\Delta x_k \to 0$:*

Թեորեմ 6. *Ենթադրենք $M_0(x_0,y_0)$-ն $u = f(x,y)$-ի որոշման տիրույթի ներքին կետ է: Ենթադրենք f-ի մասնակի ածանցյալները գոյություն ունեն և միջակայքի մեջ M_0-ի որոշ շրջակայքում և անընդհատ են այդ կետում: Այդ դեպքում $f(x,y)$-ն կլինի դիֆերենցելի M_0 կետում: Սա բավարար, բայց ոչ անհրաժեշտ պայման է:*

Այժմ ապացուցենք թեորեմի մյուս կողմը: ($\Longleftarrow$) Ենթադրենք տեղի ունեն 1) և 2) պայմանները.

$$\begin{aligned} \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z\to z_0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0} \frac{(\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y) + i(\frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_3\Delta x + \varepsilon_4\Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0} \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) + i\frac{\partial u}{\partial y}(-i\Delta x + \frac{1}{i}\Delta y) + O(\rho)}{\Delta x + i\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0} \frac{\frac{\partial u}{\partial x}(\Delta x + i\Delta y) - i\frac{\partial u}{\partial y}(\Delta x + i\Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

Ստացանք, որ $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$:

9 Անալիտիկ ֆունկցիաների հատկությունները:

Հատկություն 1 (1). Դիցուք $f(z)$ և $g(z)$ ֆունկցիաները անալիտիկ են D-ում: Այդ դեպքում $f \pm g$, $f \cdot g$ ֆունկցիաները անալիտիկ են:

Անմիջապես հետևում է սահմանի սահմանումից:

Հատկություն 2 (2). Եթե $f(z)$ և $g(z)$ ֆունկցիաները անալիտիկ են և $g(z) \neq 0$, ապա $f(z)/g(z)$ անալիտիկ է:

Հատկություն 3 (3). Եթե $w = f(z)$ անալիտիկ է D-ում, $\zeta = h(w)$ անալիտիկ է Ω-ում և այնպիսին են, որ $f(z)$-ի արժեքների բազմությունը ընկած է Ω-ի մեջ, ապա $\zeta = h(f(z))$ ֆունկցիան անալիտիկ է D-ում, ընդ որում $\zeta_z' = h_w' \cdot f_z'$:

Ապացույց. Դիցուք $z = x+iy$, $f(z) = u(x,y)+iv(x,y)$ և $h(w) = a(u,v)+ib(u,v)$: $h(f(z)) = a(u(x,y),v(x,y)) + ib(u(x,y),v(x,y))$:

$$\begin{aligned}
\zeta_z' &= \frac{\partial a}{\partial x}\cdot\frac{\partial a}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial a}{\partial v} - i\left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial a}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial a}{\partial v}\right)\\
&= \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial a}{\partial u} + i\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial a}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial a}{\partial v} - i\frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial a}{\partial v}\\
&= \frac{\partial a}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial a}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\
&= \frac{\partial a}{\partial u}\cdot w_z' + i\frac{\partial a}{\partial v}\left(-i\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\\
&= \frac{\partial a}{\partial u}\cdot w_z' - i\frac{\partial a}{\partial v}\left(i\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\\
&= w_z'\left(\frac{\partial a}{\partial u} - i\frac{\partial a}{\partial v}\right) = w_z'\cdot h_w'
\end{aligned}$$

Հատկություն 4 (4). Եթե $w = f(z)$ ֆունկցիան անալիտիկ է D-ում և $f'(z_0) \neq 0$, ապա z_0-ի որոշ շրջակայքում գոյություն ունի հակադարձ ֆունկցիա՝ $z = \varphi(w)$, որտեղ $w_0 = f(z_0)$:

Ապացույց. $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = u + iv$, այսինքն ունենք $u = u(x,y)$, պետք է ստանանք $x = x(u,v), y = y(u,v)$ վերհիշենք անբացահայտ ֆունկցիաների համակարգի մասին թեորեմը: Դիտարկենք

$$(*)\begin{cases}F_1(u_1,\dots,u_m,x_1,\dots,x_k) = 0\\ F_2(u_1,\dots,u_m,x_1,\dots,x_k) = 0\\ \dots\\ F_m(u_1,\dots,u_m,x_1,\dots,x_k) = 0\end{cases}$$

համակարգը:

Թեորեմ 7. *Ենթադրենք M_0 կետում $F_1\dots F_m$ ֆունկցիաները զրո են և դիֆերենցելի են M_0 կետի շրջակայքում: Ենթադրենք $F_1\dots F_m$ ֆունկցիաների մասնական ածանցյալները անընդհատ են M_0 կետում: Ենթադրենք $\frac{\partial(F_1,\dots,F_m)}{\partial(u_1,\dots,u_m)}|_{M_0} \neq 0$: Այդ դեպքում կամայական բավականաչափ փոքր $\varepsilon_1 > 0,\dots,\varepsilon_m > 0$ թվերի համար $\exists\delta > 0$, այն. $Q = \{(x_1,\dots,x_k) : |x_1 - x_1^0| < \delta,\dots,|x_k - x_k^0| < \delta\}$ բազմության վրա միարժեքորեն որոշված են*

$$\begin{cases}u_1 = \varphi_1(x_1,\dots,x_k)\\ \dots\\ u_m = \varphi_m(x_1,\dots,x_k)\end{cases}$$

ֆունկցիաները, բավարարող $|u_1 - u_1^0| < \varepsilon_1,\dots,|u_m - u_m^0| < \varepsilon_m$ և $u_1,\dots,u_m$-ը բավարարում են $(*)$ համակարգին: Ընդ որում $\varphi_1,\dots,\varphi_m$ ֆունկցիաները անընդհատ են և դիֆերենցելի Q-ում:

Յակոբյանի որոշիչ.

$$\frac{\partial(F_1,\dots,F_m)}{\partial(u_1,\dots,u_m)} = \begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial u_m}\\ \dots & \dots & \dots\\ \frac{\partial F_m}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial F_m}{\partial u_m}\end{vmatrix}$$

Որպեսզի կարողանանք օգտվել այս թեորեմից պետք է հատկությունների պայմանների մեջ ավելացնել այն, որ $f(z)$ ֆունկցիայի ածանցյալը անընդհատ է: Դրանից կհետևի, որ $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ մասնական ածանցյալները անընդհատ են:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \neq 0 \implies \text{թեորեմն ապացուցված է:}$$

10 Անալիտիկ ֆունկցիայի վերականգնումը նրա իրական կամ կեղծ մասով:

Պնդում. *Դիցուք $f(z)$ ֆունկցիան անալիտիկ է D-ում: Եթե տրված է անալիտիկ ֆունկցիայի իրական մասը (կեղծ մասը), ապա հաստատունի ճշտությամբ կարող ենք վերականգնել ֆունկցիան: գտնել կեղծ մասը (իրական մասը):*

Ապացույց. Ենթադրենք տրված է իրական մասը $u(x,y)$-ը: Ունենք, որ $dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$: Վերցնենք $M_0(x_0,y_0)$ կետը և որևէ Γ-ճանապարհով միացնենք (x,y)-ին և հաշվենք կորագիծ ինտեգրալը.

$$v(x,y) - v(x_0,y_0) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} dv(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$$

$$u(x,y) - u(x_0,y_0) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} du(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \frac{\partial v}{\partial y}dx - \frac{\partial v}{\partial x}dy$$

11 Ցուցչային ֆունկցիան և հատկությունները:

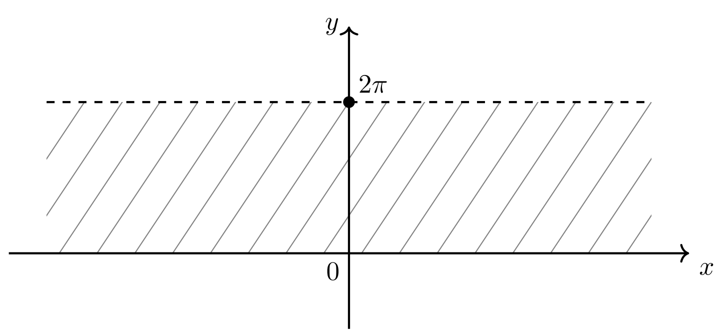
Դիտարկենք $z = x + iy$, որտեղ $z \in \mathbb{C}$:

Սահմանում. *e^z-ը հետևյալ ֆունկցիան է $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$:*

Հատկություն 5 (1). $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$:

Ապացույց.

$$\begin{aligned} e^{z_1} \cdot e^{z_2} &= e^{x_1}(\cos y_1 + i\sin y_1) \cdot e^{x_2}(\cos y_2 + i\sin y_2) \\ &= e^{x_1+x_2}(\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)) \\ &= e^{x_1+x_2+i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2} \end{aligned}$$



XOY հարթության մեջ դիտարկենք հետևյալ շերտը. $-\infty < x < +\infty, 0 < y < 2\pi$: Այդ շերտում $w = e^z = e^x(\cos y + i\sin y) \implies 0 < |e^z| < +\infty$ և ունենք $0 < y < 2\pi \implies w = e^z$ ֆունկցիան ծածկում է ամբողջ հարթությունը բացի $(0, +\infty)$-ից: Ցույց տանք, որ այս շերտի

մեջ e^z ֆունկցիան միաթերթ է: Դրա համար նախ լուծենք այս հավասարումը. $e^z = 1$:
$e^x \cos y + ie^x \sin y = 1$, ակնհայտ է որ $|e^z| = e^x = 1 \implies e^x = 1 \implies x = 0 \implies$

$$\cos y + i \sin y = 1 \implies \begin{cases} \cos y = 1 \\ \sin y = 0 \end{cases} \implies y = 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \implies z = i \cdot 2\pi k$$

Այժմ ապացուցենք միաթերթությունը: Ենթադրենք z_1 և z_2 կետերը պատկանում են այդ շերտին և $z_1 \neq z_2$: $w_1 = e^{z_1}, w_2 = e^{z_2}$: Ենթադրենք $w_1 = w_2 \implies e^{z_1} = e^{z_2} \implies e^{z_1 - z_2} = 1 \implies z_1 - z_2 = i \cdot 2\pi k \implies$ միաթերթ է: Պարզ է, որ ֆունկցիան միաթերթ կլինի $y_0 < \text{Արգ}z < y_0 + 2\pi, \forall y_0$-ի համար: Այսինքն $w = e^z$ ֆունկցիան միաթերթ է ցանկացած այսպիսի շերտում. $2\pi k < \text{Արգ}z < 2\pi k + 2\pi$:

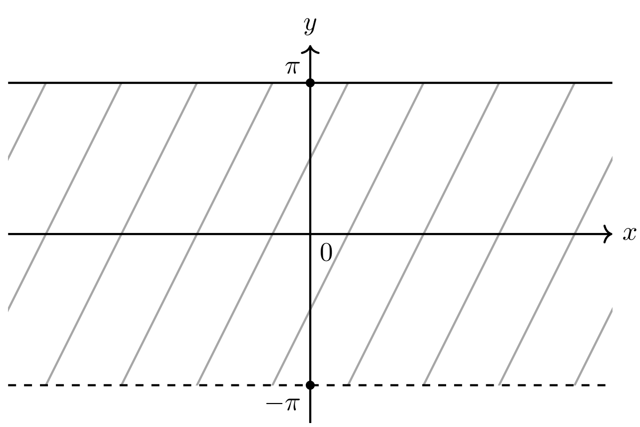
12 Լոգարիթմական ֆունկցիա:

Սահմանում. *Լոգարիթմական ֆունկցիան նշանակվում է հետևյալ կերպ.* $w = \operatorname{Ln} z$*:* w*-ն այնպիսի թիվ է, որ* $e^w = z$*:*

Դիցուք $z = \rho e^{i\varphi}$ և $w = u + iv \implies e^w = e^{u+iv} = e^u(\cos v + i \sin v) = \rho e^{i\varphi} = z \implies e^u = \rho \implies u = \ln \rho = \ln |z|$: Ունենք նաև, որ $\cos v + i \sin v = \cos \varphi + i \sin \varphi \implies v$-ի բոլոր լուծումները կլինեն հետևյալները. $v = \varphi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \implies w = \operatorname{Ln} z = \ln |z| + i\varphi + i \cdot 2\pi k$:

Սահմանում. $w = \ln z = \ln |z| + i \arg z$ *կոչվում է լոգարիթմի գլխավոր արժեք:*

Դիտարկենք $w = \ln z = \ln \rho + i \arg z$ ֆունկցիան, երբ $0 < \rho < +\infty$ և $-\pi < \arg z \leq \pi$: Ակնհայտ է, որ այն կարտապատկերվի uOv հարթության մեջ հետևյալ կերպ. Ստացվում է, որ $\operatorname{Ln} z$-ը XOY-ը արտապատկերում է uOv ամբողջությամբ բացի մի գծից, նշված շերտի վրա:



13 $\sin z, \cos z$ ֆունկցիաները.

Սահմանում.

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

Հատկություն 6 (1). $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$:

Ապացույց.

$$\cos^2 z + \sin^2 z = \frac{1}{4}(e^{2iz} + 2 + e^{-2iz} - (e^{2iz} - 2 + e^{-2iz})) = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$$

Դիտարկենք $z = iy$:

$$\cos(iy) = \frac{e^{iiy} + e^{-iiy}}{2} = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2} = \cosh y \implies \cos(iy) = \cosh y$$

$$\sin(iy) = \frac{e^{iiy} - e^{-iiy}}{2i} = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2i} = i \cdot \frac{e^{y} - e^{-y}}{2} = i \sinh y \implies \sin(iy) = i \sinh y$$

Լուծենք $\cos z = a$ հավասարումը.

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = a, \text{ նշանակենք } e^{iz} = t \implies t + \frac{1}{t} = 2a \implies t^2 - 2at + 1 = 0$$

$$\implies (t-a)^2 = a^2 - 1 \implies t - a = \sqrt{a^2 - 1} \implies t = a + \sqrt{a^2 - 1}$$

$$e^{iz} = t \implies iz = \operatorname{Ln} t \implies z = -i \operatorname{Ln} t = -i \ln(a + \sqrt{a^2 - 1})$$

(նույնը 2-ի համար):

14 z^w ֆունկցիան.

Սահմանում. $z^w = e^{w \operatorname{Ln} z}$:

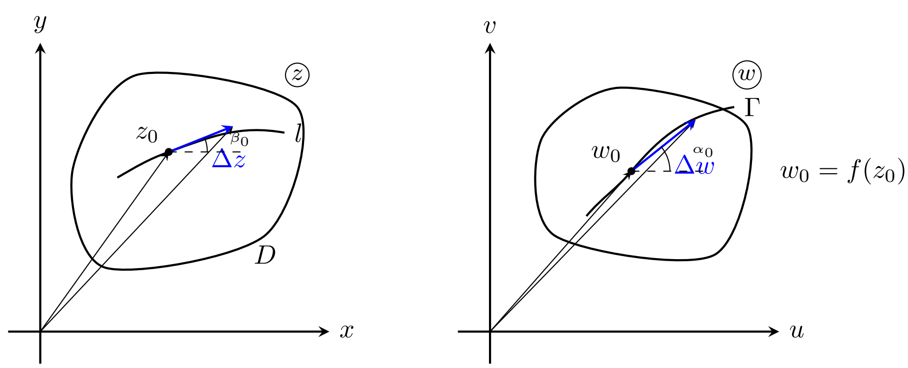
Դիտարկենք օրինակներ.

$$x^{\sin x} = e^{\sin x \ln x}$$

$$i^i = e^{i \ln i} = e^{i \ln(e^{i\pi/2})} = e^{i(\ln|i| + i\pi/2 + i2\pi k)} = e^{-\pi/2 - 2\pi k}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

15 Ածանցյալի մոդուլի և արգումենտի երկրաչափական իմաստը:

Դիտարկենք $w = f(z)$ ֆունկցիան, որը անալիտիկ է D տիրույթում: Ենթադրենք $z_0 \in D$ և $f'(z_0) \neq 0$: Դիտարկենք z_0-ի այն շրջակայքը, որտեղ կա փոխմիարժեք արտապատկերում:



Վերցնենք կամայական ողորկ կոր, որը ընկած է նշված շրջակայքում (այսուհետ կնշանակենք D-ով) և նշանակենք l-ով: Կազմենք $z_0 + \Delta z$, այնպես որ $(z_0 + \Delta z) \in l$: Այդ դեպքում $f(z_0 + \Delta z) \in \Gamma$: Ըստ պայմանի $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0) = \rho e^{i\varphi_0} \neq 0$: $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0) \implies \rho e^{i\varphi_0} \neq 0$, $\rho e^{i\varphi_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$: Նշանակենք $\arg \Delta w = \alpha_{\Delta w}$ և $\arg \Delta z = \beta_{\Delta z} \implies$

$$\rho e^{i\varphi_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta w| e^{i\alpha_{\Delta w}}}{|\Delta z| e^{i\beta_{\Delta z}}} = \lim_{\Delta z \to 0} \left(\frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} \cdot e^{i(\alpha_{\Delta w} - \beta_{\Delta z})} \right)$$

Պարզ է, որ երբ l-ի երկայնքով $\Delta z \to 0$, l-ի կորության ուղղությունը համապատասխանում z_0 կետում l-ին փարված շոշափողի ուղղության հետ: Այդ անկյունը նշանակենք β_0-ով: Նման ձևով նշանակենք α_0-ն: Պարզ է, որ $\alpha_0 = \lim_{\Delta w \to 0} \alpha_{\Delta w}$ և $\beta_0 = \lim_{\Delta z \to 0} \beta_{\Delta z}$:
$\rho e^{i\varphi_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \left(\frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} \cdot e^{i(\alpha_{\Delta w} - \beta_{\Delta z})} \right)$, ապա $\varphi_0 = \alpha_0 - \beta_0$:
Այժմ դիտարկենք l_1 կորը, որը նույնպես անցնում է z_0-ով: Կրկին սպանանք α_1, β_1 անկյունները և նույն դատողություններով կստանանք, որ
$\varphi_0 = \alpha_1 - \beta_1 \implies \alpha_1 - \beta_1 = \alpha_0 - \beta_0 \implies \alpha_1 - \alpha_0 = \beta_1 - \beta_0$: Ստացվում է, որ l_1-ի և l-ի կազմած անկյունը նույնն է ինչ Γ_1-ի և Γ-ի կազմած անկյունը: Ձևակերպենք սա, որպես պնդում:

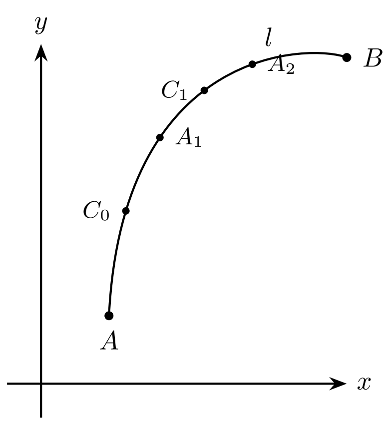
Պնդում (Առաջին հատկություն, երբ ածանցյալը $\neq 0$). *Եթե $f(z)$ անալիտիկ ֆունկցիայի ածանցյալը ինչ-որ մի $z_0 \in D$ կետում 0 չէ ($f'(z_0) \neq 0$), ապա այդ ֆունկցիան այդ կետի շրջակայքում պահպանում է այդ կետով անցնող երկու կամայական կորերի կազմած անկյունը, ընդ որում անկյան հաշվարկման ուղղությունը պահպանվում է:*

Հեշտ է տեսնել, որ $\rho = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} \implies \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} = \rho + \varepsilon(\Delta z)$, որտեղ $\varepsilon(\Delta z) \to 0$, երբ $\Delta z \to 0$: Ստացվում է, որ $|\Delta w| = \rho|\Delta z| + \varepsilon(\Delta z) \cdot |\Delta z|$: Բավականաչափ փոքր Δz-ի համար $|\Delta w| \approx \rho|\Delta z|$:
Հասնում ենք հետևյալ պնդմանը.

Պնդում (Երկրորդ հատկություն). *$w = f(z)$ ֆունկցիան z_0-ի նշված շրջակայքում կամայական փոքր Δz-ի համար w տիրույթում համապատասխանում է այնպիսի մի w-ի, որ $|\Delta w| = \rho|\Delta z|$:*

Սահմանում. *Արտապատկերումը, որը ունի նշված երկու հատկությունները, այսինքն պահպանում է անկյունը, իսկ երկարությունը փոխվում է միևնույն ρ համեմատական գործակցով կոչվում է կոնֆորմ արտապատկերում:*

16 Կոմպլեքս ինտեգրալ



Դիտարկենք $\mathbb{C}$-ում l ողորկ կորը՝ տրված պարամետրական տեսքով.

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad \alpha \le t \le \beta :$$

Ենթադրենք $x(t), y(t)$ ֆունկցիաները անընդհատ են, ունեն անընդհատ ածանցյալներ, և տեղի ունի $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0$ պայմանը:

Դիցուք ունենք $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ֆունկցիան, որը անընդհատ է l կորի որևէ շրջակայքում: l կորը կամայական ձևով տրոհենք մասերի՝ $A_1, A_2 \ldots A_n$ կետերով:

Նշանակենք $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, որտեղ A_k-ն համապատասխանում է z_k կոմպլեքս թվին: Յուրաքանչյուր $A_{k-1}A_k$ աղեղի վրա վերցնենք կամայական C_k կետ և կազմենք ինտեգրալային գումարը.

$$\sum_{k=1}^{n} f(C_k) \Delta z_k :$$

Դիտարկենք $\mathbb{C}$-ում l ողորկ կորը՝ տրված պարամետրական տեսքով.

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad \alpha \le t \le \beta :$$

Ենթադրենք $x(t), y(t)$ ֆունկցիաները անընդհատ են, ունեն անընդհատ ածանցյալներ, և տեղի ունի $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0$ պայմանը:
Դիցուք ունենք $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ ֆունկցիան, որը անընդհատ է l կորի որևէ շրջակայքում: l կորը կամայական ձևով տրոհենք մասերի՝ $A_1, A_2 \dots A_n$ կետերով:
Նշանակենք $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, որտեղ A_k-ն համապատասխանում է z_k կոմպլեքս թվին:
Յուրաքանչյուր $A_{k-1}A_k$ աղեղի վրա վերցնենք կամայական C_k կետ և կազմենք ինտեգրալային գումարը.

$$\sum_{k=1}^{n} f(C_k)\Delta z_k :$$

Սահմանում. *Եթե* $\lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(C_k)\Delta z_k$ *սահմանը գոյություն ունի և վերջավոր է՝ անկախ* l*-ի տրոհումից և* C_k *կետերի ընտրությունից, ապա այն կոչվում է* $f(z)$*-ի ինտեգրալը* l *կորով* A*-ից* B *ուղղությամբ և նշանակվում է՝*

$$\int_{AB} f(z)\, dz :$$

Այստեղ $\lambda_n = \max\{|\Delta z_k|\}$*:*

Պնդում. *Վերը նշված պայմանների դեպքում ինտեգրալը միշտ գոյություն ունի:*

Ապացույց. Ներկայացնենք $f(C_k)$ և Δz_k մեծությունները իրական և կեղծ մասերով.

$$f(C_k) = u(C_k^1, C_k^2) + iv(C_k^1, C_k^2), \quad \text{որտեղ } C_k = C_k^1 + iC_k^2,$$

$$\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k :$$

Այդ դեպքում արտադրյալը կլինի՝

$$f(C_k)\Delta z_k = [u(C_k^1, C_k^2)\Delta x_k - v(C_k^1, C_k^2)\Delta y_k] + i[v(C_k^1, C_k^2)\Delta x_k + u(C_k^1, C_k^2)\Delta y_k] :$$

Գումարելով ըստ k-ի՝ կստանանք.

$$\sum_{k=1}^{n} f(C_k)\Delta z_k = \sum_{k=1}^{n}(u(C_k)\Delta x_k - v(C_k)\Delta y_k) + i\sum_{k=1}^{n}(v(C_k)\Delta x_k + u(C_k)\Delta y_k) :$$

Երբ $\lambda_n \to 0$, գումարելիներից յուրաքանչյուրը ձգտում է համապատասխան կորագիծ ինտեգրալի. առաջին գումարելին դառնում է $\int_{AB} u(x, y)\, dx - v(x, y)\, dy$, իսկ երկրորդը՝ $\int_{AB} v(x, y)\, dx + u(x, y)\, dy$:
Հետևաբար,

$$\begin{aligned}
\int_{AB} f(z)\, dz &= \int_{AB} (u\, dx - v\, dy) + i \int_{AB} (v\, dx + u\, dy) \\
&= \int_{\alpha}^{\beta} \Big[u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)\Big]\, dt \\
&\quad + i \int_{\alpha}^{\beta} \Big[v(x(t), y(t))x'(t) + u(x(t), y(t))y'(t)\Big]\, dt :
\end{aligned}$$

Հաշվի առնելով, որ $z(t) = x(t) + iy(t) \implies z'(t) = x'(t) + iy'(t)$, և $f(z(t)) = u + iv$, ապա նրանց արտադրյալը դառնում է՝

$$\begin{aligned}
f(z(t)) \cdot z'(t) &= (u + iv)(x' + iy') \\
&= (ux' - vy') + i(vx' + uy') :
\end{aligned}$$

Այսպիսով՝

$$\int_{AB} f(z)\, dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)\, dt :$$

□

17 Ինտեգրալի հատկությունները

Հատկություն 7. Եթե $f(z)$ և $g(z)$ ֆունկցիաները անընդհատ են l-ի շրջակայքում, ապա՝

$$\int_{AB}(f(z)+g(z))\,dz = \int_{AB} f(z)\,dz + \int_{AB} g(z)\,dz :$$

Հատկություն 8. Եթե c-ն որևէ հաստատուն է, ապա՝

$$\int_{AB} cf(z)\,dz = c\int_{AB} f(z)\,dz :$$

Հատկություն 9. Եթե $l_{AB} = l_{AC} \cup l_{CB}$, ապա՝

$$\int_{l_{AB}} f(z)\,dz = \int_{l_{AC}} f(z)\,dz + \int_{l_{CB}} f(z)\,dz :$$

Հատկություն 10. Ունենք, որ՝

$$\int_{AB} f(z)\,dz = -\int_{BA} f(z)\,dz :$$

Հատկություն 11. Դիցուք $|dz| = ds$: Այդ դեպքում՝

$$\left|\int_{AB} f(z)\,dz\right| \leq \int_{AB} |f(z)|\,ds :$$

Ապացույց. Ակնհայտ է, որ $|\sum_{k=1}^{n} f(C_k)\Delta z_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(C_k)|\cdot|\Delta z_k|$, քանի որ $f(C_k) = u+iv$ և $\Delta z_k = x+iy$: Դիտարկենք արտահայտությունների մոդուլները.

$$|f(C_k)\Delta z_k| = |ux-vy+i(uy+vx)| = \sqrt{(ux-vy)^2+(uy+vx)^2},$$
$$|f(C_k)|\cdot|\Delta z_k| = \sqrt{u^2+v^2}\cdot\sqrt{x^2+y^2} :$$

Հետևաբար՝

$$\sum_{k=1}^{n} |f(C_k)|\sqrt{\Delta x_k^2+\Delta y_k^2} = \sum_{k=1}^{n} |f(C_k)| ds_k :$$

Անցնելով սահմանի՝ կստանանք, որ

$$\left|\int_{AB} f(z)\,dz\right| \leq \int_{AB} |f(z)|\,ds :$$

□

18 Շրջանագծով ինտեգրալի օրինակ, որը կախված չէ R-ից

Դիտարկենք հետևյալ ինտեգրալը.

$$\int_{|z-z_0|=R} \frac{dz}{z-z_0} :$$

Ունենք, որ $z - z_0 = Re^{it}$, որտեղ $0 \le t \le 2\pi$, հետևաբար՝ $z(t) = z_0 + Re^{it}$: Հաշվենք $z'(t)$ ածանցյալը սահմանի միջոցով.

$$\begin{aligned} z'(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{z_0 + Re^{i(t+\Delta t)} - (z_0 + Re^{it})}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} R \frac{e^{it} e^{i\Delta t} - e^{it}}{\Delta t} \\ &= Re^{it} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{e^{i\Delta t} - 1}{\Delta t} \\ &= Re^{it} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\cos \Delta t + i \sin \Delta t - 1}{\Delta t} \\ &= Re^{it} \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{-2\sin^2(\Delta t/2)}{\Delta t} + i \frac{\sin \Delta t}{\Delta t} \right) \\ &= iRe^{it} : \end{aligned}$$

Տեղադրելով ինտեգրալի մեջ՝ կստանանք.

$$\int_{|z-z_0|=R} \frac{dz}{z - z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{it}\, dt}{Re^{it}} = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i :$$

19 Անալիտիկ ֆունկցիաների Կոշիի հիմնական թեորեմը

Սահմանում. *Եթե Γ-ն փակ կոր է, կտոր առ կտոր ողորկ է և չունի ինքնահատում, ապա այն կոչվում է* ***կոնտուր****:*

Թեորեմ 8. *Ենթադրենք $f(z)$ ֆունկցիան անալիտիկ է D միակապ տիրույթում, իսկ Γ-ն կամայական փակ կոնտուր է՝ ընկած D-ի մեջ: Այդ դեպքում՝*

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 0 :$$

Ապացույց. Ապացույցը հեշտացնելու համար դնենք լրացուցիչ պայման. Դիցուք $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, պահանջենք, որ $u(x, y)$ և $v(x, y)$ ֆունկցիաները ունենան անընդհատ առաջին կարգի մասնական ածանցյալներ: Այս պայմանը մեզ թույլ է տալիս օգտվել Գրինի բանաձևից: Գրինի բանաձևը ունի հետևյալ տեսքը.

$$\int_{\partial D} (P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy) = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy :$$

Ենթադրենք Γ-ն տրված է հետևյալ տեսքով.

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad \alpha \le t \le \beta :$$

Ձևափոխենք կոմպլեքս ինտեգրալը.

$$\begin{aligned}\int_\Gamma f(z)\,dz &= \int_\alpha^\beta f(z(t))\cdot z'(t)\,dt\\
&= \int_\alpha^\beta f(x(t)+iy(t))\cdot(x'(t)+iy'(t))\,dt\\
&= \int_\alpha^\beta [u(x(t),y(t))+iv(x(t),y(t))]\cdot(x'(t)+iy'(t))\,dt\\
&= \int_\alpha^\beta [u(x(t),y(t))x'(t)-v(x(t),y(t))y'(t)]\,dt\\
&\quad + i\int_\alpha^\beta [v(x(t),y(t))x'(t)+u(x(t),y(t))y'(t)]\,dt\\
&= \int_\Gamma (u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy) + i\int_\Gamma (v(x,y)\,dx+u(x,y)\,dy) :\end{aligned}$$

Կիրառելով Գրինի բանաձևը՝ կստանանք.

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \iint_\Omega\left(-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)dx\,dy + i\iint_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy :$$

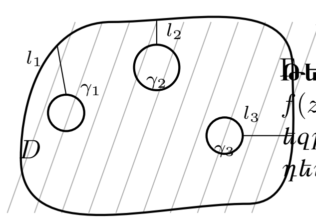
Ունենք, որ $f(z)$-ը անալիտիկ է, այսինքն տեղի ունեն Կոշի-Ռիմանի պայմանները.

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\end{cases}$$

Այստեղից հետևում է, որ ստացված գումարը հավասար է 0-ի: □

Տեղի ունի հետևյալ թեորեմը, որը կօգտագործենք առանց ապացույցի.

Թեորեմ 9. *Եթե $f(z)$ ֆունկցիան անալիտիկ է D-ում և անընդհատ ընդհուպ մինչև ∂D-ն, իսկ D-ն միակապ է, ապա $\int_{\partial D} f(z)\,dz = 0$:*



Այժմ դիտարկենք D բազմակապ տիրույթը: Նշանակենք $\partial D = \Gamma\cup\gamma_1\cup\cdots\cup\gamma_n$:

Թեորեմ 10. *Դիցուք D-ն բազմակապ տիրույթ է, $f(z)$-ը անալիտիկ է D-ում և անընդհատ մինչև եզրը: $\Gamma,\gamma_1,\dots,\gamma_n$ կտոր առ կտոր ողորկ են: Այդ դեպքում՝*

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f(z)\,dz :$$

Ապացույց. Վերցնենք յուրաքանչյուր γ_k-ի վրա կամայական կետ և միացնենք այն ուղիղ կտորով Γ-ի որևէ կետի հետ: D տիրույթը «կկտրենք» այդ l_k կտորներով: Նշանակենք $D^* = D\setminus\{l_1\cup l_2\cup\cdots\cup l_n\}$: D^*-ն միակապ է, հետևաբար ճիշտ կլինի նախորդ թեորեմը.

$$\begin{aligned}0=\int_{\partial D^*} f(z)\,dz &= \int_\Gamma f(z)\,dz + \sum_{k=1}^n\int_{\gamma_k^-} f(z)\,dz\\
&\quad + \sum_{k=1}^n\left[\int_{l_k} f(z)\,dz + \int_{l_k^-} f(z)\,dz\right] :\end{aligned}$$

Քանի որ վերջին գումարը 0 է (նույն կտորով ինտեգրալներ են հակառակ ուղղություններով), կունենանք, որ

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = -\sum_{k=1}^n\int_{\gamma_k^-} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^n\int_{\gamma_k} f(z)\,dz :$$

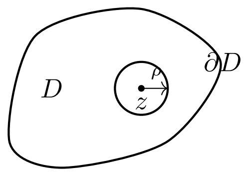
□

20 Կոշու ինտեգրալային թեորեմը

Թեորեմ 11. *Դիցուք $f(z)$-ը անալիտիկ է D միակապ տիրույթում, անընդհատ է ընդհուպ մինչև եզրը, իսկ եզրը կտոր առ կտոր ողորկ է: Այդ դեպքում $\forall z \in D$-ի համար ճիշտ է հետևյալ բանաձևը.*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(t)}{t-z}\,dt :$$

Ապացույց.



$D^* = D \setminus \{|t-z| \le \rho\}$

Վերցնենք ρ շառավղով և z կենտրոնով շրջանագիծ: Դիտարկենք $D \setminus \{|t-z| \le \rho\}$ տիրույթը և այն նշանակենք D^*-ով: Կարող ենք գրել, որ $\int_{\partial D^*} \frac{f(t)}{t-z}\,dt = 0$: Ըստ նախորդ թեորեմի (բազմակապ տիրույթի համար) կունենանք՝

$$\begin{aligned}
\int_{\partial D} \frac{f(t)}{t-z}\,dt &= \int_{|t-z|=\rho} \frac{f(t)}{t-z}\,dt \\
&= \int_{|t-z|=\rho} \frac{f(t)-f(z)+f(z)}{t-z}\,dt \\
&= \int_{|t-z|=\rho} \frac{f(t)-f(z)}{t-z}\,dt + f(z)\int_{|t-z|=\rho} \frac{dt}{t-z} \\
&= \int_{|t-z|=\rho} \frac{f(t)-f(z)}{t-z}\,dt + f(z)\cdot 2\pi i \quad \text{(հարց 18)} \quad (1)
\end{aligned}$$

Օգտվենք $f(z)$-ի անընդհատությունից z կետում. $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, այնպես որ $\forall t \in D$, եթե $|t-z| < \delta$, ապա $|f(t)-f(z)| < \varepsilon$: ρ-ն ընտրենք այնպես, որ $\rho < \delta$: Կստացվի՝

$$\left| \int_{|t-z|=\rho} \frac{f(t)-f(z)}{t-z}\,dt \right| \le \int_{|t-z|=\rho} \frac{|f(t)-f(z)|}{|t-z|}\,|dt| :$$

Ունենք, որ $|f(t)-f(z)| < \varepsilon$ և $|t-z| = \rho$: Փոխարինենք՝ $t-z = \rho e^{i\varphi} \implies dt = \rho e^{i\varphi}\cdot i\,d\varphi \implies |dt| = \rho|e^{i\varphi}|\cdot|i|\,d\varphi = \rho\,d\varphi$, որտեղ $0 \le \varphi \le 2\pi$: Շարունակելով գնահատականը՝

$$\le \int_0^{2\pi} \frac{\varepsilon}{\rho}\cdot\rho\,d\varphi = \varepsilon\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi\varepsilon :$$

Երբ $\rho \to 0$, (1)-ի առաջին գումարելին ձգտում է 0-ի, հետևաբար՝

$$\int_{\partial D} \frac{f(t)}{t-z}\,dt = 2\pi i f(z) \implies f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{f(t)}{t-z}\,dt :$$

□

21 Կոշու բանաձևը ածանցյալների համար (ապացույցը 24-ում)

Դիցուք տրված է $g(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$, որտեղ $f(x,y)$-ը անընդհատ է $[a,b]\times[c,d]$-ում, ունի $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ ածանցյալը, որը նույնպես անընդհատ է $[a,b]\times[c,d]$-ում: Այդ դեպքում հայտնի է, որ.

$$g'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,dx :$$

Այժմ դիտարկենք $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(t)}{t-z}\, dt$, որտեղ $f(z)$-ը անալիտիկ է D-ում: Կարող ենք ասել, որ $\frac{f(t)}{t-z}$ և $(\frac{f(t)}{t-z})'_z = \frac{f(t)}{(t-z)^2}$ ֆունկցիաները անընդհատ են ըստ t-ի, և կարելի է ապացուցել, որ տեղի ունի հետևյալ բանաձևը.

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(t)}{(t-z)^2}\, dt : \qquad (2)$$

Նույն դատողությունները կարող ենք անել $\frac{f(t)}{(t-z)^2}$ և $(\frac{f(t)}{(t-z)^2})'_z = \frac{2f(t)}{(t-z)^3}$ ֆունկցիաների համար և կկիրառենք նույն թեորեմը՝ ստանալով $f''(z) = \frac{2}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(t)}{(t-z)^3}\, dt$: Այսպես շարունակելով՝ կստանանք ընդհանուր բանաձևը.

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}\, dt :$$

Այստեղից հետևում է, որ անալիտիկ ֆունկցիան ունի ցանկացած կարգի ածանցյալ: Բայց հակառակ պնդումը ճիշտ չէ: Քանի որ անալիտիկ ֆունկցիան ունի ցանկացած կարգի ածանցյալ, ապա նրա իրական և կեղծ մասերը անվերջ դիֆերենցելի են:

22 Հարմոնիկ ֆունկցիա, Լապլասի հավասարում:

Սահմանում. *$u(x, y)$ իրական ֆունկցիան կոչվում է հարմոնիկ D տիրույթում, եթե D-ում այն ունի անընդհատ երկրորդ կարգի մասնակի ածանցյալներ և բավարարում է Լապլասի $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ հավասարմանը:*

Կոշի-Ռիմանի պայմաններից և խառը ածանցյալների հավասարության մասին թեորեմից հետևում է, որ $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ անալիտիկ ֆունկցիայի իրական u և կեղծ v մասերը հարմոնիկ ֆունկցիաներ են:

Սահմանում. *v ֆունկցիան կոչվում է u հարմոնիկ ֆունկցիայի համալուծ հարմոնիկ D տիրույթում, եթե $u + iv$ ֆունկցիան անալիտիկ է D տիրույթում:*

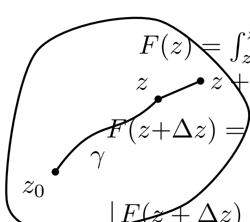
Եթե u-ն հարմոնիկ է որևէ միակապ տիրույթում, ապա նրա համալուծ հարմոնիկը կարելի է գտնել

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy + C$$

բանաձևով, որտեղ ինտեգրման ուղղությունը ընտրված է նշված կետերը միացնող որևէ կտոր առ կտոր ողորկ կոր:

23 Նախնական ֆունկցիա

Դիտարկենք D-ում $w = f(z)$ ֆունկցիան, այնպիսին, որ $f(z)$-ը անընդհատ է D-ում և նրա ինտեգրալը կամայական կորով կախված չէ ճանապարհի ձևից: Վերցնենք D-ում z և z_0 կետերը, միացնենք γ ողորկ կորով:



Դիտարկենք $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(t)dt$: z-ին տանք Δz աճ և դիտարկենք

$$F(z+\Delta z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(t)dt = \int_{z_0}^{z} f(t)dt + \int_{z}^{z+\Delta z} f(t)dt \implies F(z+\Delta z) - F(z) = \int_{z}$$

$$\left| \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} - f(z) \right| = \left| \frac{1}{\Delta z} \int_{z}^{z+\Delta z} f(t)dt - f(z) \right|$$

Նկատենք, որ $\int_z^{z+\Delta z} dt = \Delta z$:

$$= \left| \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(t)dt - \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(z)dt \right| = \frac{1}{|\Delta z|} \left| \int_z^{z+\Delta z} (f(t) - f(z))dt \right| \leq \frac{1}{|\Delta z|} \int_z^{z+\Delta z} |f(t)-f(z)||dt|$$

Քանի որ $f(z)$-ը անընդհատ ֆունկցիա է, ապա $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\exists \delta(\varepsilon) > 0$, այնպես որ $\forall |t - z| < \delta \implies |f(t) - f(z)| < \varepsilon$: Եթե Δz-ը ընտրված է այնպիսին, որ $|\Delta z| < \delta$, ապա կունենանք, որ

$$\leq \frac{1}{|\Delta z|} \cdot \varepsilon \cdot \left| \int_z^{z+\Delta z} dt \right| = \frac{\varepsilon \cdot |\Delta z|}{|\Delta z|} = \varepsilon$$

$\implies F'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{F(z+\Delta z) - F(z)}{\Delta z} = f(z) \implies F(z)$-ը $f(z)$-ի նախնականն է:

Պնդում. *$f(z)$-ի բոլոր նախնականները տարբերվում են հաստատունով:*

Ապացույց. Ենթադրենք $\Phi(z)$-ը $f(z)$-ի մեկ այլ նախնական է՝ $\Phi'(z) = f(z)$: Նշանակենք $h(z) = F(z) - \Phi(z) \implies h'(z) = F'(z) - \Phi'(z) = f(z) - f(z) = 0 \implies h(z) = C$: Այսպիսով ստացանք, որ $F(z) = \Phi(z) + C$: Այժմ դիտարկենք հետևյալ ինտեգրալը.

$$\int_{z_1}^{z_2} f(t)dt = \int_{z_0}^{z_2} f(t)dt - \int_{z_0}^{z_1} f(t)dt = F(z_2) - F(z_1) = \Phi(z_2) + C - \Phi(z_1) - C = \Phi(z_2) - \Phi(z_1) :$$

$\implies$ ստացանք, որ եթե $\Phi(z)$-ը $f(z)$-ի որևէ նախնական է, ապա տեղի ունի Նյուտոն-Լայբնիցի բանաձևը. $\int_{z_1}^{z_2} f(t)dt = \Phi(z_2) - \Phi(z_1)$:

24 Պնդում $f(z)$ անալիտիկ ֆունկցիայի ցանկացած կարգի ածանցյալի մասին:

Պնդում. *Եթե D-ում տրված է $f(z)$ անալիտիկ ֆունկցիան, ապա $\forall z_0 \in D$-ում $f(z)$ ֆունկցիան ունի ցանկացած կարգի ածանցյալ:*

Ապացույց. Նախ ապացուցենք առաջին կարգի ածանցյալի գոյությունը, օգտվելով Կոշու ինտեգրալային բանաձևից: Վերցնենք $\rho > 0$, այնպիսին որ $|z - z_0| < \rho$ անհավասարությանը պատկանող z-երը պատկանեն D-ին: Գրենք Կոշու ինտեգրալային բանաձևը z_0-ում. $|z - z_0| < \rho$, $f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$, վերցնենք $|\Delta z|$, այնպես որ $(z_0 + \Delta z)$-ը նույնպես պատկանի ρ շառավղով շրջանին: Կստանանք

$$f(z_0 + \Delta z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{z - (z_0 + \Delta z)} dz$$

$$\implies \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{\Delta z \cdot 2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} f(z) \left[\frac{1}{z - (z_0 + \Delta z)} - \frac{1}{z - z_0} \right] dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i \cdot \Delta z} \int_{|z-z_0|=\rho} f(z) \cdot \frac{\Delta z}{(z - z_0 - \Delta z)(z - z_0)} dz$$

$$\implies \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)(z - z_0 - \Delta z)} dz$$

Քանի որ $\frac{f(z)}{(z-z_0)(z-z_0-\Delta z)}$ ֆունկցիան անընդհատ է $|z - z_0| = \rho$ շրջանում $\implies$ կարող ենք անցնել սահմանի երբ $\Delta z \to 0$:

$$\implies \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz = f'(z_0)$$

Կարողացանք ինտեգրալի ներսում անցնենք սահմանի, քանի որ ֆունկցիայի անընդհատությունից շրջանի վրա հետևում է նրա հավասարաչափ անընդհատությունը, դրանից էլ հետևում է իրական և կեղծ մասերի հավասարաչափ անընդհատությունը: (*)

Նույն դատողությունները կրկնելով կստանանք հետևյալ ընդհանուր բանաձևը.

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} dt$$

25 Անալիտիկ ֆունկցիայի մոդուլի մաքսիմումը:

Թեորեմ 12. *Դիցուք $f(z)$-ը անալիտիկ է D-ում ընդհուպ մինչև եզրը, ապա $|f(z)|$-ը իր ամենամեծ արժեքը ընդունում է տիրույթի եզրին՝ ∂D-ում: Եթե ամենամեծ արժեքն ընդունում է տիրույթի ներսի կետում, ապա ֆունկցիան նույնաբար հաստատուն ֆունկցիա է:*

Ապացույց. Ենթ. $|f(z)|$-ը իր ամենամեծ արժեքն ընդունում է D-ին պատկանող z_0 կետում. $|f(z_0)| = \max_{z\in D} |f(z)|$: Դիցուք $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \implies |f(z)| = \sqrt{u^2+v^2} \implies$ $|f(z)|$ ֆունկցիան անընդհատ է D-ում $\implies$ կա կետ, որտեղ $|f(z)|$-ը ունի ամենամեծ արժեքը՝ z_0-ում: ρ-ն վերցնենք այնպիսին, որ $|z-z_0| = \rho$ շրջագծին բավարարող բոլոր z-երը լինեն D-ի մեջ:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{z-z_0} dz$$

Նշանակենք $z - z_0 = t \implies |z-z_0| = \rho = |t| \implies t = \rho e^{i\varphi} \implies z = z_0 + \rho e^{i\varphi} \implies z'_\varphi = \rho e^{i\varphi} \cdot i$:

$$\implies f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+\rho e^{i\varphi}) \cdot \rho e^{i\varphi} \cdot i}{\rho e^{i\varphi}} d\varphi \implies f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0+\rho e^{i\varphi}) d\varphi$$

Նշանակենք $M = |f(z_0)|$:

$$M = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0+\rho e^{i\varphi}) d\varphi \right| \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0+\rho e^{i\varphi})| d\varphi \le \frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi = M$$

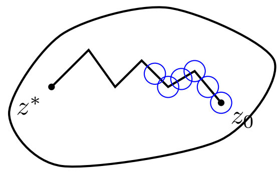
$$\implies \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0+\rho e^{i\varphi})| d\varphi = M$$

Ապացուցենք, որ $|f(z_0+\rho e^{i\varphi})|$ ֆունկցիան նույնաբար հավասար է M-ի $\forall \varphi \in [0, 2\pi]$-ի դեպքում: Ենթադրենք որևէ $\varphi_0 \in [0, 2\pi]$-ի դեպքում $|f(z_0+\rho e^{i\varphi_0})| < M$, այդ դեպքում քանի որ $|f(z_0+\rho e^{i\varphi})|$ ֆունկցիան անընդհատ է ըստ φ-ի, ուրեմն $\exists \varphi_0$-ի որևէ δ շրջակայք՝ $(\varphi_0 - \delta, \varphi_0 + \delta)$, որտեղ $|f(z_0+\rho e^{i\varphi})| < M$:

$$\implies M = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0+\rho e^{i\varphi})| d\varphi = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\varphi_0-\delta} M d\varphi + \int_{\varphi_0-\delta}^{\varphi_0+\delta} |f(z_0+\rho e^{i\varphi})| d\varphi + \int_{\varphi_0+\delta}^{2\pi} M d\varphi \right]$$

$$< \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\varphi_0-\delta} M d\varphi + \int_{\varphi_0-\delta}^{\varphi_0+\delta} M d\varphi + \int_{\varphi_0+\delta}^{2\pi} M d\varphi \right] = M \implies M < M \text{ (հակասություն)}:$$

$\implies$ շրջանագծի վրա $|f(z_0+\rho e^{i\varphi})|$-ի արժեքը M է: Քանի որ սա կախված չէ ρ-ից, կարող ենք այն շարունակաբար փոքրացնել և կստանանք, որ ամբողջ շրջանի ներսում ֆունկցիայի արժեքը M է:



Այժմ ցույց տանք, որ D-ին պատկանող $\forall z^*$-ում $|f(z^*)| = M$: Օգտվենք D-ի կապակցվածությունից: Կարող ենք z_0-ն z^*-ին միացնել որևէ P_n բեկյալով ($P_n \subset D$): Նշանակենք $\alpha = \min \rho(P_n, \partial D)$, այսինքն եզրի և բեկյալի միջև նվազագույն հեռավորությունը է: Ենթադրենք $\alpha > 0$ (չի հպվում եզրի հետ): Այդ դեպքում եթե վերցնենք $r = \alpha/2$ և P_n-ը ծածկենք $\alpha/2$ շառավղով շրջաններով, որոնց կենտրոնները պատկանեն P_n-ին: Քանի որ P_n-ը փակ և սահմանափակ բազմություն է, ապա ըստ Բորել-Լեբեգի կարող ենք ընտրել վերջավոր քանակի նման շրջաններ, որոնք ծածկում են P_n բեկյալը:

$M = |f(z_0)|$, եթե z_0-ով տանենք $\alpha/2$ շառավղով շրջան, շրջանի բոլոր կետերում կստացվի $|f(z)| = M$: Վերցնենք այդ շրջանի հատումը P_n-ի հետ (z_1), $M = |f(z_1)|$: z_1 կենտրոնով տանենք 2-րդ շրջանը և այդպես շարունակ: Վերջում կամ z^*-ը կլինի վերջին շրջանի կենտրոնն, կամ կպատկանի վերջին շրջանին և $|f(z^*)| = M$: $\implies$ ամբողջ հարթության վրա կունենանք, որ $f(z) = Me^{i\varphi} = M(\cos\varphi + i\sin\varphi) = M\cos\varphi + iM\sin\varphi$: Քանի որ ստացանք, որ D-ում $|f(z)| = M$, իսկ դա անընդհատ ֆունկցիա էր, ապա ∂D-ում նույնպես $|f(z)|$-ը պետք է լինի M (սա դասի ժամանակ չենք ասել):
$f(z) = M\cos\varphi + iM\sin\varphi$: Կոշի-Ռիմանի պայմանից հետևում է, որ $M\cos\varphi$-ն և $M\sin\varphi$-ն հաստատուն թվեր են: Սա երկար է ապացուցվում, լրիվ չենք անի:

$$x = \rho\cos\varphi, \quad u = u(x,y) = u(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$$
$$y = \rho\sin\varphi, \quad v = v(x,y) = v(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)$$

$$\begin{cases} u'_\rho = u'_x \cdot x'_\rho + u'_y \cdot y'_\rho = u'_x\cos\varphi + u'_y\sin\varphi \\ u'_\varphi = u'_x \cdot x'_\varphi + u'_y \cdot y'_\varphi = u'_x(-\rho\sin\varphi) + u'_y\rho\cos\varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} v'_\rho = v'_x \cdot x'_\rho + v'_y \cdot y'_\rho = v'_x\cos\varphi + v'_y\sin\varphi \\ v'_\varphi = v'_x \cdot x'_\varphi + v'_y \cdot y'_\varphi = v'_x(-\rho\sin\varphi) + v'_y\rho\cos\varphi \end{cases}$$

26 Մորերայի թեորեմը:

Թեորեմ 13. *Եթե $f(z)$-ը անընդհատ է D-ում և նրա ինտեգրալը $\forall$ փակ, պարզ (որոշ դեպքերում չէ) կորով ընկած D-ում հավասար է 0-ի, ապա $f(z)$-ը անալիտիկ է D-ում:*

Ապացույց. Քանի որ կամայական փակ կորով $f(z)$-ի ինտեգրալը 0 է, ապա $f(z)$-ի ինտեգրալը կամայական ոչ փակ կորով կախված չէ ճանապարհից: 23-րդ հարցում ցույց տվեցինք, որ եթե $f(z)$-ը անընդհատ է D-ում և նրա ինտեգրալը կամայական γ կորով կախված չէ ճանապարհի ձևից, ապա $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(t)dt$ ֆունկցիան $f(z)$-ի նախնականն է ($F'(z) = f(z)$): $\implies$ Այս դեպքում $F(z)$-ը կլինի $f(z)$-ի նախնականը $\implies$ $F(z)$ ֆունկցիան անալիտիկ է $\implies$ այն ունի ցանկացած կարգի ածանցյալ $\implies$ $\forall F''(z) = f'(z)$ $\implies$ f-ը անալիտիկ է:

27 Ամբողջ ֆունկցիա:

Սահմանում. *Դիցուք $f(z)$-ը անալիտիկ է $\mathbb{C}$ կոմպլեքս հարթության վրա: Այդ դեպքում $f(z)$-ը կոչվում է ամբողջ ֆունկցիա:*

Օրինակներ՝ $w = e^z, w = \sin z, Q_n(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$:

28 Անալիտիկ ֆունկցիայի առաջին կարգի ածանցյալի անհավասարություն:

Դիցուք $f(z)$-ը անալիտիկ է D-ում, կարող ենք գրել $|z-z_0|<\rho\subset D$ շրջակայքի համար.

$$f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\rho}\frac{f(t)}{(t-z)^2}dt$$

$$\implies |f'(z)|=\frac{1}{2\pi}\left|\int_{|z-z_0|=\rho}\frac{f(t)}{(t-z)^2}dt\right|\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|f(z_0+\rho e^{i\varphi})|}{|z_0+\rho e^{i\varphi}-z|^2}\cdot\rho d\varphi$$

այս անհավասարությունը ստացանք
$dt=(z_0+\rho e^{i\varphi})'_{\varphi}d\varphi=\rho e^{i\varphi}id\varphi, |dt|=|\rho e^{i\varphi}id\varphi|=\rho d\varphi$-ից:
(1) անհավասարության մեջ վերցնենք $z=z_0$, կստանանք

$$|f'(z_0)|\le\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|f(z_0+\rho e^{i\varphi})|}{|\rho e^{i\varphi}|^2}\rho d\varphi=\frac{1}{2\pi\rho}\int_0^{2\pi}|f(z_0+\rho e^{i\varphi})|d\varphi\le\frac{M}{2\pi\rho}\cdot 2\pi=\frac{M}{\rho}$$

որտեղ $M=\max|f(z_0+\rho e^{i\varphi})|, 0\le\varphi\le 2\pi$: Ստացանք, որ $|f'(z_0)|\le\frac{M}{\rho}$:

29 Լիուվիլի թեորեմը:

Թեորեմ 14. *Դիցուք $f(z)$ ֆունկցիան ամբողջ է և սահմանափակ: Այդ դեպքում այն հաստատուն ֆունկցիա է:*

Ապացույց. Դիցուք $f(z)$-ը ամբողջ ֆունկցիա է և սահմանափակ՝ $\exists k>0$, այնպիսին որ $\forall z\in\mathbb{C}, |f(z)|<k$: Ցույց տանք, որ այդ դեպքում հարթությանը պատկանող ցանկացած կետում այդ ֆունկցիայի ածանցյալը 0 է: Վերցնենք $\forall z_0\in\mathbb{C}$, կունենանք $|f'(z_0)|\le k/\rho$: Անցնենք սահմանի, երբ $\rho\to+\infty$, կստանանք, որ $f'(z_0)=0\implies f'(z)\equiv 0,\forall z\in\mathbb{C}$-ի համար: $f(z)$-ը $f'(z)$-ի նախնականն է $\implies 0\equiv\int_{z_0}^{z}f'(z)dz=F(z)-F(z_0)=f(z)-f(z_0)\implies f(z)\equiv f(z_0)$:

Այս թեորեմի կիրառման օրինակ է հանրահաշվի հիմնական թեորեմի ապացույցը:

30 Հանրահաշվի հիմնական թեորեմը

Թեորեմ 15. *n-րդ կարգի բազմանդամն ունի ճիշտ n հատ արմատ՝ հաշված նաև պատիկությունը:*

Ապացույց. Դիցուք ունենք n-րդ կարգի բազմանդամ ($n\ge 1$), որտեղ $a_n\ne 0$.

$$P_n(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$$

Քայլ 1. Արմատի գոյությունը
Նախ ապացուցենք, որ $P_n(z)$-ն ունի առնվազն մեկ արմատ: Պարզ է, որ $P_n(z)$-ը ամբողջ (անալիտիկ ամբողջ հարթության վրա) ֆունկցիա է: Կատարենք հակասող ենթադրություն. ենթադրենք $P_n(z)$-ը չունի արմատ, այսինքն՝ $P_n(z)\ne 0,\forall z\in\mathbb{C}$:
Դիտարկենք հետևյալ ֆունկցիան.

$$w(z)=\frac{1}{P_n(z)}$$

Քանի որ հայտարարը զրո չէ, $w(z)$-ը նույնպես կլինի ամբողջ և անալիտիկ ֆունկցիա: Գնահատենք մոդուլը.

$$|w(z)|=\frac{1}{|a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0|}=\frac{1}{|z|^n\left|a_n+\frac{a_{n-1}}{z}+\cdots+\frac{a_0}{z^n}\right|}$$

Երբ $|z| \to +\infty$, փակագծերի ներսի արտահայտությունը ձգտում է a_n-ի (որը 0 չէ): Հետևաբար.

$$\lim_{|z|\to\infty} |w(z)| = 0$$

Սա նշանակում է, որ գոյություն ունի այնպիսի $R > 0$ շառավիղ, որ $|z| > R$ տիրույթում $|w(z)| < 1$:
Մյուս կողմից, $|z| \le R$ փակ շրջանում $w(z)$-ը անընդհատ է, հետևաբար, ըստ Վայերշտրասի թեորեմի, այն սահմանափակ է: Այսինքն՝

$$\exists A > 0, \quad \text{որ} \quad \max_{|z|\le R} |w(z)| = A$$

Վերցնելով $M = \max\{A, 1\}$, ստանում ենք, որ $|w(z)| \le M$ կամայական $z \in \mathbb{C}$-ի համար:
Ստացանք, որ $w(z)$-ը **ամբողջ** է և **սահմանափակ**:
Ըստ **Լիուվիլի թեորեմի**, $w(z)$-ը պետք է լինի հաստատուն ($w(z) \equiv C$):

$$\frac{1}{P_n(z)} = C \implies P_n(z) = \frac{1}{C} = \text{const}$$

Սա հակասում է պայմանին, որ $a_n \ne 0$ (քանի որ $n \ge 1$): Հետևաբար, ենթադրությունը սխալ էր, և $P_n(z)$-ը ունի առնվազն մեկ արմատ:

Քայլ 2. Արմատների քանակը
Դիցուք z_1-ը $P_n(z)$-ի արմատ է, այսինքն՝ $P_n(z_1) = 0$: Գրենք բազմանդամի տարբերությունը.

$$\begin{aligned} P_n(z) &= P_n(z) - P_n(z_1) \\ &= a_1(z - z_1) + a_2(z^2 - z_1^2) + \dots + a_n(z^n - z_1^n) \end{aligned}$$

Քանի որ $(z^k - z_1^k)$ արտահայտությունը բաժանվում է $(z - z_1)$-ի, կարող ենք ընդհանուր հանել $(z - z_1)$ արտադրիչը.

$$P_n(z) = (z - z_1) \cdot Q_{n-1}(z)$$

որտեղ $Q_{n-1}(z)$-ը $(n-1)$-րդ կարգի բազմանդամ է:
Կիրառելով նույն դատողությունը $Q_{n-1}(z)$-ի համար, կգտնենք z_2 արմատ, այնպես որ $Q_{n-1}(z_2) = 0$, և այդպես շարունակ: Այս պրոցեսը կարող ենք կրկնել ճիշտ n անգամ՝ վերջում ստանալով.

$$P_n(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n)$$

Այսինքն՝ բազմանդամն ունի ճիշտ n հատ արմատ: $\square$

31 Անընդհատ ֆունկցիաների շարքեր

Սահմանում. *$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ ֆունկցիոնալ շարքը կոչվում է **հավասարաչափ զուգամետ շարք**, եթե բավարարվում է հետևյալ պայմանը. $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\exists N = N(\varepsilon)$, այնպիսին որ $\forall n > N$-ի և $\forall p = 1, 2, \dots$ համար,*

$$\forall z \in D \implies |S_{n+p}(z) - S_n(z)| < \varepsilon,$$

որտեղ $S_n(z) = \sum_{k=1}^{n} u_k(z)$:

Համարժեք սահմ: Դիցուք $\forall z \in D$-ի համար $\exists \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k(z) \equiv f(z)$: Այդ դեպքում $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ շարքը կլինի **հավասարաչափ զուգամետ շարք**, եթե $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\exists N = N(\varepsilon)$, այնպիսին որ $\forall n > N$-ի և $\forall z \in D$-ի համար՝

$$\left| \sum_{k=1}^{n} u_k(z) - f(z) \right| < \varepsilon :$$

Թեորեմ 16. *Եթե $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ շարքը հավասարաչափ զուգամիտում է $f(z)$ ֆունկցիային և բոլոր $u_n(z)$-ները անընդհատ են D-ում, ապա $f(z)$ ֆունկցիան անընդհատ է D-ում:*

Ապացույց. Վերցնենք $\forall z_0 \in D$ և ցույց տանք, որ $f(z)$-ը այդ կետում անընդհատ է: Այսինքն պետք է ցույց տանք, որ $\forall \varepsilon > 0$ թվի համար $\exists \delta = \delta(\varepsilon)$, այնպիսին որ $\forall z \in D$-ի համար բավարարող $|z - z_0| < \delta$ անհավասարմանը՝ $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$:
Վերցնենք $\forall \varepsilon > 0$ և կազմենք հետևյալ տարբերությունը.

$$\begin{aligned}|f(z) - f(z_0)| &= \left| f(z) - \sum_{k=1}^{n} u_k(z) + \sum_{k=1}^{n} u_k(z) - \sum_{k=1}^{n} u_k(z_0) + \sum_{k=1}^{n} u_k(z_0) - f(z_0) \right| \\ &\leq \left| f(z) - \sum_{k=1}^{n} u_k(z) \right| + \left| \sum_{k=1}^{n} (u_k(z) - u_k(z_0)) \right| + \left| \sum_{k=1}^{n} u_k(z_0) - f(z_0) \right|\end{aligned}$$

- Առաջին և երրորդ գումարելիների համար $\exists N > 0$, այնպիսին որ $\forall n > N$-ի դեպքում երկու գումարելին էլ փոքր են դառնում $\varepsilon/3$-ից:
- Երկրորդ գումարելիի համար ֆիքսենք $n > N$ (վերնշված N-ի մասին է խոսքը): Օգտվենք $u_k(z)$-ների անընդհատությունից. $\varepsilon/3n > 0$-ի համար $\exists \delta = \delta(\varepsilon/3n) > 0$, այնպիսին որ $\forall z$-ի համար բավարարող $|z - z_0| < \delta \implies |u_k(z) - u_k(z_0)| < \varepsilon/3n$:

Հետևաբար՝

$$|f(z) - f(z_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + n \cdot \frac{\varepsilon}{3n} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \implies f(z)\text{-ը } z_0\text{-ում անընդհատ է:}$$

Թեորեմ 17. *Եթե $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ շարքը հավասարաչափ զուգամիտում է $f(z)$-ին D-ում և $u_k(z)$ ֆունկցիաները անընդհատ են, ապա $\forall \Gamma$ ողորկ կորի համար ընկած D-ում ճիշտ է, որ՝*

$$\int f(z)\, dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int u_k(z)\, dz :$$

Թեորեմ 18. *Եթե $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ շարքը հավասարաչափ զուգամիտում է $f(z)$-ին և $u_k(z)$-ները անալիտիկ են D-ում, որտեղ D-ն միակապ է, ապա $f(z)$ ֆունկցիան անալիտիկ է D-ում:*

Ապացույց. Վերցնենք կամայական փակ կոնտուր ընկած D-ում: Ըստ Կոշու թեորեմի կունենանք, որ $\int u_k(z)\, dz = 0$: Ըստ նախորդ թեորեմի՝

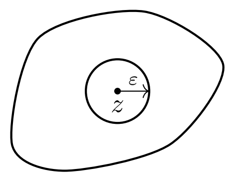
$$\int f(z)\, dz = \sum \int u_k(z)\, dz = 0 :$$

Հետևաբար $f(z)$-ը, որ անընդհատ է D-ում, նրա ինտեգրալը կամայական փակ կոնտուրով 0 է $\implies$ ըստ Մորերայի թեորեմի $f(z)$-ը անալիտիկ է:
Այս թեորեմը ճիշտ է նաև բազմակապ տիրույթի համար:

32 Վայերշտրասի առաջին թեորեմ

Թեորեմ 19 (առաջին մաս). *Դիցուք ունենք $f_n(z)$ անալիտիկ ֆունկցիաների հաջորդականություն D տիրույթում: Ենթադրենք $f_n(z)$ ֆունկցիաները հավասարաչափ զուգամիտում են $f(z)$ ֆունկցիային D տիրույթում: Այդ դեպքում $f(z)$-ը նույնպես անալիտիկ է D-ում:*

Ապացույց.



Ենթադրենք D-ի եզրը կտոր առ կտոր ողորկ է: Ըստ Կոշու ինտեգրալային բանաձևի՝

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f_n(t)}{t - z}\, dt :$$

ε-ը վերցնենք այնպիսին, որ $\varepsilon < \rho(\partial D, z)$, որտեղ $\rho(\partial D, z)$-ը ∂D-ի և z-ի ամենակարճ հեռավորությունն է: Վերցնենք $|t - z| = \varepsilon$:

Կստանանք, որ ինտեգրալը շրջանագծով՝

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t-z|=\varepsilon} \frac{f_n(t)}{t-z}\,dt :$$

Այստեղ կարող ենք անցնել սահմանի, քանի որ $\frac{f_n(t)}{t-z}$-ն հավասարաչափ զուգամետ է: Ունենք, որ $\frac{f_n(t)}{t-z} \rightrightarrows \frac{f(t)}{t-z}$: Հետևաբար, երբ $n\to\infty$, կստանանք՝

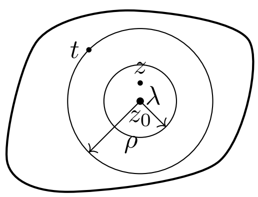
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t-z|=\varepsilon} \frac{f(t)}{t-z}\,dt :$$

Քանի որ $\frac{f(t)}{t-z}$-ը անընդհատ է, կարող ենք ածանցել ինտեգրալի նշանի տակ՝

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t-z|=\varepsilon} \frac{f(t)}{(t-z)^2}\,dt \implies f(z)\text{-ը անալիտիկ է:} \quad (*)$$

Թեորեմ 20 (երկրորդ կետ)**.** *Դիցուք $f_n(z)$ անալիտիկ են D-ում և հավասարաչափ զուգամիտում են $f(z)$-ի երբ $n\to\infty$: Այդ դեպքում $f_n(z)$ ֆունկցիայի k-րդ կարգի ածանցյալը հավասարաչափ զուգամիտում է $f(z)$-ի k-րդ կարգի ածանցյալին՝ $f_n^{(k)}(z) \rightrightarrows f^{(k)}(z)$:*

Ապացույց.



Վերցնենք $\forall z_0 \in D$ և նրա շուրջը z_0 կենտրոնով շրջան՝ $|z-z_0|<\rho$: Ենթադրենք $t\in\{|t-z_0|=\rho\}$ և պահանջենք, որ $|z-z_0|<\lambda$, որտեղ $\lambda<\rho$: Նշված z-երի համար կարող ենք գրել, որ տեղի ունեն հետևյալ բանաձևերը.

$$f_n^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int \frac{f_n(t)}{(t-z)^{k+1}}\,dt,$$

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int \frac{f(t)}{(t-z)^{k+1}}\,dt :$$

Վերցնենք $\forall\varepsilon>0$ և գնահատենք տարբերությունը.

$$\begin{aligned} |f_n^{(k)}(z) - f^{(k)}(z)| &= \frac{k!}{2\pi}\left|\int \frac{f_n(t)-f(t)}{(t-z)^{k+1}}\,dt\right| \\ &\le \frac{k!}{2\pi}\int \frac{|f_n(t)-f(t)|}{|t-z|^{k+1}}\,|dt| \\ &\le \frac{k!}{2\pi}\int \frac{|f_n(t)-f(t)|}{(\rho-\lambda)^{k+1}}\,|dt| \end{aligned}$$

Քանի որ $f_n(z)\rightrightarrows f(z)$, ապա $\exists N=N(\varepsilon)>0$, այնպիսին որ $\forall n>N$-ի և $\forall t\in\{|t-z_0|=\rho\}$-ի համար $|f_n(t)-f(t)|<\varepsilon$:
Կատարենք նշանակում՝ $t-z_0=\rho e^{i\varphi} \implies t=z_0+\rho e^{i\varphi}$: Հետևաբար $dt=i\rho e^{i\varphi}d\varphi \implies |dt|=\rho d\varphi$: Շարունակելով գնահատականը՝

$$\le \frac{k!}{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon}{(\rho-\lambda)^{k+1}}\cdot\rho\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{k!\rho}{(\rho-\lambda)^{k+1}}\cdot\varepsilon :$$

Ֆիքսված k,ρ,λ-ի համար արտադրիչը հաստատուն թիվ է: Ապացուցեցինք, որ $\forall z\in\{|z-z_0|<\lambda\}$ շրջանի համար հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամիտում է $f^{(k)}(z)$-ին:

Ընդհանրացում ամբողջ D-ի համար:
Վերցնենք $\forall K\subset D$, այնպիսին որ $\overline{K}\subset D$ (K-ն բազմություն է, իսկ $\overline{K}$-ն իր փակումը): K-ի և D-ի ամենափոքր հեռավորությունը նշանակենք α-ով՝ $\alpha=\rho(K,\partial D)>0$:

- Ըստ վեր ապացուցվածի, K-ին պատկանող յուրաքանչյուր կետի համար $\exists$ համապատասխան λ շրջակայք, այնպես որ $f_n^{(k)}(z)\rightrightarrows f^{(k)}(z)$:

- Վերցնենք այդ λ-ները ավելի փոքր, քան $\alpha/2$-ն է: Այդ դեպքում K փակ և սահմանափակ բազմությունը ծածկված կլինի $\alpha/2$-ից փոքր շառավղով շրջաններով:
- Քանի որ K-ն կոմպակտ է (փակ, սահմանափակ), ապա ըստ **Բորելի լեմմայի** նշված շրջանների ծածկույթից կարելի է ընտրել վերջավոր քանակով շրջաններով ծածկույթ: Դիցուք այդ շրջանները m հատ են:

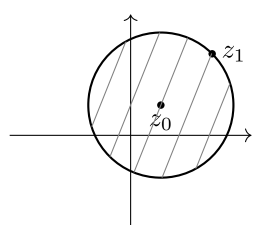
Կստանանք, որ $\forall\varepsilon > 0$ թվի համար $\exists N = \max\{N_1, \dots, N_m\}$, այնպիսին որ $\forall n > N$-ի և $\forall z \in K$-ի համար՝

$$|f_n^{(k)}(t) - f^{(k)}(t)| < \varepsilon \implies f_n^{(k)}(z) \rightrightarrows f^{(k)}(z) \quad D\text{-ում:}$$

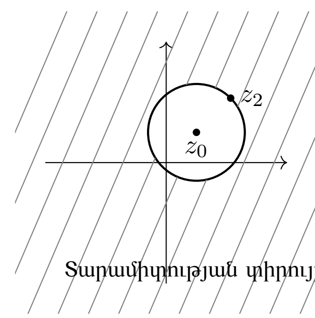
33 Աստիճանային շարքեր, Աբելի թեորեմը

Դիտարկենք հետևյալ ֆունկցիոնալ շարքը. $\sum a_n(z - z_0)^n$: Գիտենք, որ $a_n(z - z_0)^n$-ը անալիտիկ է $\mathbb{C}$-ում:

Թեորեմ 21 (Աբել). *Եթե $\sum a_n(z - z_0)^n$ շարքը զուգամետ է $z_1 \neq z_0$ կետում, ապա շարքը զուգամետ է բոլոր z-երի համար, որոնք բավարարում են $|z-z_0| < |z_1-z_0|$ անհավասարությանը: Եթե շարքը տարամետ է ինչ-որ $z_2 \neq z_0$ կետում, ապա տարամետ է բոլոր z-երի համար, որոնք բավարարում են $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$ անհավասարությանը:*



Զուգամետության տիրույթ



Տարամիտության տիրույթ

Ապացույց. Դիցուք շարքը զուգամետ է z_1-ում: Սա նշանակում է, որ $|a_n(z_1 - z_0)^n| \to 0$, երբ $n \to \infty$: Հետևաբար, $\exists N > 0$, այնպիսին որ $\forall n > N$-ի համար $|a_n(z_1 - z_0)^n| < 1$: Նշանակենք $M = \max\{1, |a_0|, |a_1(z_1 - z_0)|, \dots, |a_n(z_1 - z_0)^n|\}$: Այստեղից հետևում է, որ $|a_n(z_1 - z_0)^n| \leq M, \forall n = 1, 2 \dots$:
Վերցնենք կամայական z, որը բավարարում է $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ անհավասարությանը: Նշանակենք $q = |z - z_0|/|z_1 - z_0| < 1$: Գնահատենք շարքի գլխավոր անդամը.

$$|a_n(z - z_0)^n| = |a_n| \cdot |z - z_0|^n \cdot \frac{|z_1 - z_0|^n}{|z_1 - z_0|^n} = |a_n(z_1 - z_0)^n| \cdot q^n < M \cdot q^n :$$

Քանի որ $q < 1$, ապա $\sum q^n = 1/(1 - q)$ զուգամետ է: Հետևաբար, շարքը զուգամետ է z-ում ըստ Վայերշտրասի հայտանիշի: □

Հիշեցնենք Վայերշտրասի հայտանիշը.

Թեորեմ 22. *Ունենք $\sum u_n(x)$ ֆունկցիոնալ շարքը և ունենք, որ $|u_n(x)| \leq \alpha_n, n = 1, 2 \dots$ և $\forall x \in X_0$-ի համար, որտեղ $\sum \alpha_n$ թվային շարքը զուգամետ է: Այդ դեպքում $\sum u_n(x)$ շարքը հավասարաչափ զուգամետ է X_0 բազմության վրա:*

Սահմանում. *Կասենք, որ $f_n(z)$ անալիտիկ ֆունկցիաների հաջորդականությունը հավասարաչափ զուգամիտում է $f(z)$-ին, եթե $\forall K$ բազմության համար, այնպիսին որ $\overline{K} \subset D, \forall\varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon, K) > 0$, այնպիսին որ $\forall n > N$-ի և $\forall z \in K$-ի համար $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$:*

Այժմ ապացուցենք Աբելի թեորեմի 2-րդ մասը:

Մաս 2-ի ապացույց. Ենթադրենք z_2 կետում շարքը փարամետ է: Վերցնենք կամայական z, այնպիսին որ $|z-z_0| > |z_2-z_0|$: Ենթադրենք հակառակը՝ $\exists z^*$, այնպիսին որ $|z^*-z_0| > |z_2-z_0|$ և z^*-ում շարքը զուգամետ է: Ըստ թեորեմի առաջին մասի՝ քանի որ շարքը զուգամետ է z^*-ում, ապա այն պետք է զուգամետ լինի ցանկացած կետում, որի հեռավորությունը z_0-ից փոքր է $|z^* - z_0|$-ից: Մասնավորապես, քանի որ $|z_2 - z_0| < |z^* - z_0|$, շարքը պետք է զուգամետ լիներ z_2-ում: Սա հակասում է պայմանին, հետևաբար շարքը փարամետ է $\forall z$-ի համար, որոնք բավարարում են $|z - z_0| > |z_2 - z_0|$ պայմանին: □

34 Զուգամիտության շառավիղ

Սահմանում. *Դիցուք A-ն z-երի այն բազմությունն է, որոնց համար $\sum a_n(z - z_0)^n$ շարքը զուգամետ է: $R = \sup |z - z_0|(z \in A)$-ն կոչվում է շարքի զուգամիտության շառավիղ:*

Պնդում. *$\forall z$-ի համար, որոնք բավարարում են $|z - z_0| < R$, շարքը զուգամետ է:*

Ապացույց. Վերցնենք $\forall z$ այդ անհավասարմանը բավարարող՝ $|z - z_0| = \rho < R$: Ըստ սուպրեմումի սահմանման՝ $\exists z_1 \in A$, այնպիսին որ $|z_1 - z_0| > \rho = |z - z_0|$: Քանի որ $z_1 \in A \implies$ շարքը զուգամետ է z_1-ում: Հետևաբար, ըստ Աբելի թեորեմի առաջին մասի, շարքը զուգամետ է նաև z-ում: □

Պնդում. *$\sum a_n(z-z_0)^n$ շարքի համար զուգամիտության շառավիղը որոշվում է Կոշի-Հադամարի բանաձևով.*

$$R = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} :$$

Ապացույց. Դիտարկենք $\sum |a_n|\cdot|z-z_0|^n$ շարքը և կիրառենք Կոշիի զուգամիտության սկզբունքը (արմատի հայտանիշը):

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n| \cdot |z - z_0|^n} = |z - z_0| \cdot \limsup \sqrt[n]{|a_n|} = q :$$

Երբ $q < 1$, շարքը զուգամետ է, այսինքն՝ $|z - z_0| < 1/(\limsup \sqrt[n]{|a_n|})$: Երբ $q > 1$, շարքը փարամետ է, այսինքն՝ $|z-z_0| > 1/(\limsup \sqrt[n]{|a_n|})$: Հետևաբար, $R = 1/(\limsup \sqrt[n]{|a_n|})$: □

35 Թեյլորի շարք

Դիտարկենք $f(z)$ ֆունկցիան անալիտիկ D-ում: Ըստ Վայերշտրասի թեորեմի առաջին կետի կարող ենք ասել, որ $\sum a_n(z - z_0)^n$ շարքը հավասարաչափ զուգամետ է $\forall z$-ի համար $|z - z_0| < R$ փիրույթից:

Թեորեմ 23. *Եթե $f(z)$-ը անալիտիկ է D-ում, ապա $\forall z_0 \in D$-ի համար գոյություն ունի մի շրջակայք, որտեղ $f(z)$-ը միարժեքորեն վերածվում է աստիճանային շարքի:*

$$f(z) = \sum a_n(z - z_0)^n, \quad \forall z : |z - z_0| < \rho,$$

ընդ որում այդ վերլուծությունը միակն է:

Ապացույց. Վերցնենք $|z - z_0| < \rho \subset D$ շրջակայքը: Ըստ Կոշի ինտեգրալային բանաձևի $\forall z \in \{|z - z_0| < \rho\}$-ի համար կունենանք.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t-z_0|=\rho} \frac{f(t)}{t - z}\, dt :$$

Ձևափոխենք ենթաինտեգրալային արտահայտությունը.

$$\frac{1}{t - z} = \frac{1}{(t - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{(t - z_0)(1 - \frac{z-z_0}{t-z_0})} :$$

Քանի որ $|z-z_0|<|t-z_0|=\rho$, ապա $q=\frac{z-z_0}{t-z_0}$ մեծության համար $|q|<1$: Հետևաբար, կարող ենք օգտվել երկրաչափական պրոգրեսիայի բանաձևից՝ $\sum q^n=\frac{1}{1-q}$:

$$\frac{1}{t-z}=\frac{1}{t-z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{t-z_0}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^n}{(t-z_0)^{n+1}}:$$

Գնահատենք անդամները.

$$\left|\frac{(z-z_0)^n}{(t-z_0)^{n+1}}\right|=\frac{|z-z_0|^n}{|t-z_0|^n}\cdot\frac{1}{|t-z_0|}=|q|^n\cdot\frac{1}{\rho}:$$

Քանի որ $|q|^n\le\frac{1}{\rho}$ և շարքը հավասարաչափ զուգամետ է, կարող ենք անդամ առ անդամ ինտեգրել: Ստացվածը տեղադրենք Կոշիի ինտեգրալային բանաձևի մեջ.

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int f(t)\left[\sum\frac{(z-z_0)^n}{(t-z_0)^{n+1}}\right]dt=\sum(z-z_0)^n\left[\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt\right]=\sum a_n(z-z_0)^n,$$

որտեղ

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt=\frac{n!}{2\pi in!}\int\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt=\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}:$$

Միակությունը. Դիցուք $f(z)=\sum b_n(z-z_0)^n$: Երկու մասն էլ բազմապատկենք $\frac{1}{2\pi i(z-z_0)^{k+1}}$-ով և ինտեգրենք շրջանագծով, որտեղ $|z-z_0|=r<\rho$:

$$\frac{f(z)}{2\pi i(z-z_0)^{k+1}}=\sum\frac{b_n}{2\pi i}(z-z_0)^{n-k-1}:$$

Քանի որ շարքը հավասարաչափ զուգամետ է, կարող ենք անդամ առ անդամ ինտեգրել:

$$a_k=\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}=\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz=\sum\frac{b_n}{2\pi i}\int(z-z_0)^{n-k-1}dz:$$

Հաշվի առնելով, որ $\int(z-z_0)^m\,dz=\begin{cases}2\pi i, & m=-1\\ 0, & m\neq-1\end{cases}$, կստանանք, որ միակ ոչ զրոյական անդամը գումարում $n=k$ դեպքն է ($n-k-1=-1\implies n=k$):

$$\frac{b_k}{2\pi i}\cdot2\pi i=b_k\implies a_k=b_k:$$

□

Դիտարկենք մի քանի օրինակ $z_0=0$ դեպքում:

- $w=e^z=\sum a_nz^n$, որտեղ $a_n=\left.\frac{(e^z)^{(n)}}{n!}\right|_{z=0}=\frac{1}{n!}$:

$$e^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}:$$

Զուգամիտությունը հեշտ է ցույց տալ $\forall z$-ի համար (սահմանափակ տիրույթում՝ հավասարաչափ): $|r_n|=\frac{|z|^n}{n!}\implies\frac{|r_{n+1}|}{|r_n|}=\frac{|z|}{n+1}\to0$: Կարող ենք z-ի փոխարեն տեղադրել $iz,-iz$:

$$e^{iz}=1+iz-\frac{z^2}{2!}-\frac{iz^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\frac{iz^5}{5!}-\dots,\quad e^{-iz}=1-iz-\frac{z^2}{2!}+\frac{iz^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{iz^5}{5!}-\dots$$

- $\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\dots$
- $\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=z-\frac{z^3}{3!}+\dots$

36 Անալիտիկ ֆունկցիաների միակության թեորեմը

Թեորեմ 24. *Դիցուք $f(z)$-ը անալիտիկ է D-ում և $z_0 \in D$: Եթե $\exists \{z_n\} \in D$ հաջորդականություն, այնպիսին որ $f(z_n) = 0, \forall n = 1, 2, 3 \ldots$ և $\{z_n\} \to z_0$, ապա $f(z)$ ֆունկցիան նույնաբար 0 է:*

Ապացույց. Կարող ենք ենթադրել, որ $z_n \neq z_0, \forall n = 1, 2 \ldots$: Ըստ Թեյլորի թեորեմի՝ $f(z)$-ը կարող ենք ներկայացնել շարքի տեսքով. $f(z) = \sum a_k (z - z_0)^k$: Տեղադրենք z_n արժեքները.

$$0 = f(z_n) = a_0 + a_1(z_n - z_0) + a_2(z_n - z_0)^2 + \ldots \quad (1)$$

Անցնելով սահմանի, երբ $n \to \infty$ (քանի որ $z_n \to z_0$), կստանանք $a_0 = 0$: Հետևաբար, $f(z) = (z - z_0)(a_1 + a_2(z - z_0) + a_3(z - z_0)^2 + \ldots)$: Նորից տեղադրենք z_n և բաժանենք $(z_n - z_0)$-ի (քանի որ $z_n \neq z_0$).

$$\frac{f(z_n)}{z_n - z_0} = 0 = a_1 + a_2(z_n - z_0) + \ldots$$

Անցնելով սահմանի՝ կստանանք $a_1 = 0$: Այս պրոցեսը շարունակելով՝ կստանանք, որ բոլոր $a_k = 0$, հետևաբար $f(z) \equiv 0$ (z_0-ի որևէ շրջակայքում): □

Հետևանք. Դիցուք $f(z)$ և $g(z)$ ֆունկցիաներն անալիտիկ են D-ում, $z_0 \in D$ և $\exists \{z_n\}$ հաջորդականություն ընկած D-ում, այնպիսին որ $\{z_n\} \to z_0$ երբ $n \to \infty$: Այդ դեպքում, եթե $f(z_n) = g(z_n), \forall n = 1, 2 \ldots$-ի համար, ապա $f(z) \equiv g(z)$:

Ապացույց. Վերցնենք $h(z) = f(z) - g(z)$ ֆունկցիան: Այն բավարարում է նախորդ թեորեմի պայմաններին ($h(z_n) = 0$), հետևաբար $h(z) \equiv 0 \implies f(z) \equiv g(z)$: □

Լրացուցիչ պարզաբանում (ընդլայնում ամբողջ տիրույթի վրա). Ապացուցենք, որ D տիրույթում $f(z) \equiv 0$: Վերցնենք $\forall z' \in D$ և միացնենք z_0-ին բեկյալով: Նշանակենք $\alpha = \rho(P, \partial D)$ (բեկյալի հեռավորությունը եզրից): Վերցնենք z_0 կենտրոնով և $\alpha/2$ շառավղով շրջան: Այդ շրջանում $f(z) = 0$ (ըստ վերը ապացուցվածի): Շրջանագծի հատումը բեկյալի հետ նշանակենք c_1-ով: Կառուցենք հաջորդ շրջանը c_1 կենտրոնով և $\alpha/2$ շառավղով: Ակնհայտ է, որ c_1 կետի համար բավարարվում են թեորեմի պայմանները (այն կուտակման կետ է զրոների համար), հետևաբար այս շրջանում նույնպես $f(z) = 0$: Շարունակելով այս ընթացքը՝ կհասնենք z'-ին և կստանանք, որ $f(z') = 0$, հետևաբար $f(z) \equiv 0$ ամբողջ տիրույթում:

37 Լորանի շարք և մեկուսացված եզակի կետեր

Դիտարկենք հետևյալ շարքը. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$: Ըստ Կոշի-Ադամարի լեմմայի երկրորդ գումարելիի զուգամիտության շառավիղը $R = 1/(\limsup \sqrt[n]{|a_n|})$ է: Նշանակենք $1/(z - z_0) = t \implies \sum a_{-n}/(z - z_0)^n = \sum a_{-n} t^n$, զուգամիտության շառավիղը նշանակենք $1/r$-ով՝ $1/r = \limsup \sqrt[n]{|a_{-n}|}$: Կստանանք, որ եթե $|z - z_0| < R$ առաջին գումարելին զուգամետ է, և եթե $1/|z - z_0| < 1/r$, կամ որ նույնն է $|z - z_0| > r$, առաջին գումարելին զուգամետ է:

Դիտարկենք օրինակ. $\sum \frac{1}{2^n z^n} + \sum z^n \implies I$ շարքը զուգամետ է երբ $|z| > 1/2$, իսկ II-րդը երբ $|z| < 1 \implies$ ամբողջ շարքը կլինի զուգամետ երբ $1/2 < |z| < 1$: Կարող ենք գրել $r < R, r \leq |z - z_0| \leq R$, $R < R$, այս դեպքում շարքը կլինի հավասարաչափ զուգամետ: Այսպիսի շարքը կոչվում է Լորանի շարք: Մենք կդիտարկենք $r = 0$ դեպքը՝ $0 < |z - z_0| < R$:

Սահմանում. *Ենթադրենք $f(z)$ ֆունկցիան անալիտիկ է $0 < |z - z_0| < R$ տիրույթում: Եթե $f(z)$-ը անալիտիկ է z_0 կետի շրջակայքում և անալիտիկ չէ z_0-ում, ապա z_0-ն կոչվում է $f(z)$-ի համար մեկուսացված եզակի կետ:*

Թեորեմ 25 (Լորանի). *Ենթադրենք $f(z)$ ֆունկցիան անալիտիկ է $r < |z-z_0| < R$ օղակում: Այդ դեպքում $f(z)$ ֆունկցիան վերլուծվում է Լորանի շարքի այդ օղակում, այսինքն՝*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$$

ընդ որում միակ ձևով:

Ապացույց. Ենթադրենք $f(z)$-ը անընդհատ է ընդհուպ մինչև եզրը: Ըստ Կոշու ինտեգրալային բանաձևի $\forall z$-ի համար պատկանող օղակին կարող ենք գրել, որ

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t-z_0|=R} \frac{f(t)}{t-z_0} dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{|t-z_0|=r} \frac{f(t)}{t-z} dt$$

Առաջին ինտեգրալի համար

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{t-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{(t-z_0)(1-\frac{z-z_0}{t-z_0})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(t-z_0)^{n+1}}$$

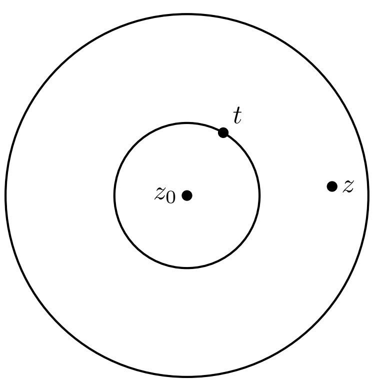
Ինտեգրենք

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{|t-z_0|=R} f(t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(t-z_0)^{n+1}} dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{|t-z_0|=R} \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}} dt \right) (z-z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \end{aligned}$$

որտեղ $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|t-z_0|=R} \frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}} dt$:
Դիտարկենք երկրորդ ինտեգրալը՝

$$-\frac{1}{t-z} = \frac{1}{z-t} = \frac{1}{z-z_0-(t-z_0)} = \frac{1}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{t-z_0}{z-z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}$$

Ունենք հետևյալ պատկերը.



այսինքն $|t-z_0| < |z-z_0| \implies \implies |\frac{t-z_0}{z-z_0}| < 1 \implies \frac{1}{z-z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(t-z_0)^n}{(z-z_0)^n}$ շարքը հավասարաչափ զուգամետ է $\implies \implies$ Կարող ենք տեղադրել ինտեգրալի մեջ և անդամ առ անդամ ինտեգրել:

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{2\pi i}\int_{|t-z_0|=r}\frac{f(t)}{t-z}dt &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|t-z_0|=r}f(t)(t-z_0)^n dt\right)\frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{|t-z_0|=r}f(t)(t-z_0)^{n-1}dt\right]\frac{1}{(z-z_0)^{n}}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|t-z_0|=r}\frac{f(t)}{(t-z_0)^{-n+1}}dt\right)\frac{1}{(z-z_0)^{n}}\\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^{n}}
\end{aligned}
$$

որտեղ $a_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t-z_0|=r}\frac{f(t)}{(t-z_0)^{-n+1}}dt$:
Քանի որ $\frac{f(t)}{(t-z_0)^{-n+1}}$ և $\frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}$-ն անալիտիկ ֆունկցիայի եզրային արժեքներ են համապատասխան շրջանի վրա, ապա ըստ բազմակապ տիրույթների համար Կոշի թեորեմի կվերցնենք $\forall\rho$, այնպես որ $r<\rho<R$ և կստանանք, որ

$$
a_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t-z_0|=\rho}\frac{f(t)}{(t-z_0)^{-n+1}}dt,\quad a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|t-z_0|=\rho}\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}dt
$$

Այժմ ապացուցենք, որ ֆունկցիան վերլուծվում է Լորանի շարքի միակ ձևով: Ենթադրենք $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_{-n}}{(z-z_0)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}b_n(z-z_0)^n$: Երկու կողմն էլ բազմապատկենք $\frac{1}{2\pi i(z-z_0)^{m+1}}$-ով և ինտեգրենք $|z-z_0|=\rho$ շրջանագծով.

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\rho}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}}dz &= \sum_{n=1}^{\infty}b_{-n}\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\rho}\frac{dz}{(z-z_0)^{n+m+1}}\\
&+\sum_{n=0}^{\infty}b_n\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\rho}\frac{dz}{(z-z_0)^{m-n+1}}
\end{aligned}
$$

Գիտենք, որ $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\rho}\frac{dz}{(z-z_0)^k}=\begin{cases}1, & \text{եթե } k=1\\ 0, & \text{եթե } k\neq 1\end{cases}\implies=b_m$, և քանի որ $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\rho}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{m+1}}dz=a_m\implies b_m=a_m$: □

38 Մեկուսացված եզակի կետերի բնութագրումը Լորանի շարքերով:

Դիտարկենք $f(z)$ ֆունկցիան, որը անալիտիկ է $0<|z-z_0|<R$ տիրույթում: Եթե վերցնենք $r<R=\rho$, $r<|z-z_0|<R$-ի դեպքում ըստ Լորանի թեորեմի $f(z)$-ը կվերլուծվի Լորանի շարքի.

$$
f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n
$$

որտեղ $a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\rho}\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz, r<\rho<R$: Շարքի տեսքը չի փոխվի եթե r-ը ձգտեցնենք 0-ի:

Սահմանում (1)**.** *$f(z)$-ի համար $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ մասը կոչվում է Լորանի շարքի գլխավոր մաս, իսկ $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$-ը՝ ռեգուլյար մաս:*

Սահմանում (2)**.** *z_0 կետը կոչվում է $f(z)$-ի համար վերացնելի (մեկուսացված) եզակի կետ, եթե նրա Լորանի շարքի բոլոր $a_{-n}=0$:*

Օրինակ. $z_0 = 0$, $\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots$ z_0-ն մեկուսացված եզակի կետ է:

Սահմանում (3). *z_0 կետը $f(z)$-ի համար կոչվում է k-րդ կարգի բևեռ, եթե նրա Լորանի շարքի գլխավոր մասի գործակիցները բավարարում են հետևյալ պայմանին. $0 = a_{-k-1} = a_{-k-2} = \dots$, իսկ $a_{-k} \neq 0$:*

Այսինքն k-րդ կարգի բևեռի դեպքում Լորանի շարքը ունի հետևյալ տեսքը.

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{a_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$$

Սահմանում (4). *z_0 կետը $f(z)$-ի համար կոչվում է էապես եզակի կետ, եթե a_{-n} գործակիցների մեջ կան անվերջ քանակի ոչ-զրոյական էլեմենտներ:*

Թեորեմ 26. *Որպեսզի z_0-ն լինի $f(z)$-ի համար k-րդ կարգի բևեռ, անհրաժեշտ է և բավարար, որ z_0-ի որևէ շրջակայքում $f(z)$-ը ունենա հետևյալ տեսքը $f(z) = (z - z_0)^{-k}\varphi(z)$, որտեղ $\varphi(z)$-ը անալիտիկ է և $\varphi(z_0) \neq 0$:*

Սահմանում (5). *z_0 կետը կոչվում է $f(z)$ ֆունկցիայի զրո, եթե $f(z_0) = 0$: Կասենք, որ z_0 կետը $f(z)$ անալիտիկ ֆունկցիայի k-րդ կարգի զրո է, եթե $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$ և $f^{(k)}(z_0) \neq 0$: Առաջին կարգի զրոն անվանում են նաև պարզ զրո:*

Ապացույց. Քանի որ $f(z)$-ը անալիտիկ է z_0-ի որևէ շրջակայքում, ապա z_0-ի որևէ շրջակայքում վերլուծվում է Թեյլորի շարքի. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, որտեղ $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ Ապացուցենք անհրաժեշտությունը. $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$ և $f^{(k)}(z_0) \neq 0 \implies \implies f(z) = a_k(z-z_0)^k + a_{k+1}(z-z_0)^{k+1} + \dots = (z-z_0)^k(a_k + a_{k+1}(z-z_0) + \dots)$ Իսկ բավարարությունը ապացուցելու համար նույն քայլերը կանենք հակառակ հերթականությամբ սկզբում գրելով $\varphi(z) = a_k + a_{k+1}(z-z_0) + \dots$

Թեորեմ 27. *Որպեսզի $f(z)$-ի համար z_0-ն մեկուսացված եզակի կետ է, որպեսզի z_0-ն լինի k-րդ կարգի բևեռ անհրաժեշտ է և բավարար, որ $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^k}$ ունենա այս տեսքը, որտեղ $\varphi(z)$-ը անալիտիկ է z_0-ի շրջակայքում և $\varphi(z_0) \neq 0$:*

Ապացույց. Ապացուցենք անհրաժեշտությունը:

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + \frac{a_{-k+1}}{(z-z_0)^{k-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \dots$$

$$= \frac{1}{(z-z_0)^k}(a_{-k} + a_{-k+1}(z-z_0) + \dots), \quad \varphi(z_0) = a_{-k} \neq 0$$

Բավարարությունը ապացուցելու համար նույն քայլերը կանենք հակառակ հերթականությամբ:

Թեորեմ 28. *Որպեսզի z_0 կետը $f(z)$-ի համար լինի վերացնելի եզակի կետ անհրաժեշտ է և բավարար որ $f(z)$ ֆունկցիան ունենա վերջավոր սահման, երբ $z \to z_0$:*

Ապացույց. Ապացուցենք բավարարությունը: Դիցուք $f(z)$-ը ունի վերջավոր սահման, երբ $z \to z_0 \implies f(z)$ ֆունկցիան սահմանափակ է $|z - z_0| < R$-ում: Վերցնենք $f(z_0) = \lim_{z\to z_0} f(z) \implies$ կարող ենք գրել, որ $a_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{-n+1}}dz$ $\forall n = 1, 2, \dots$: Դիցուք $|f(z)| < M, \forall z$-ի համար $|z - z_0| < R$ փիրույթից:

$$|a_{-n}| \leq \frac{1}{2\pi\rho}\int_0^{2\pi} \frac{|f(z_0 + \rho e^{i\varphi})|}{\rho^{-n+1}}d\varphi \leq \frac{\rho^n}{2\pi}\cdot M\cdot 2\pi \to 0 \text{ երբ } \rho \to 0, \forall n = 1, 2, \dots \implies \text{ բոլոր } a_{-n} = 0 :$$

Այժմ ապացուցենք անհրաժեշտությունը: Դիցուք z_0-ն վերացնելի եզակի կետ է $\implies f(z) = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots$ քանի որ աջ մասը հավասարաչափ զուգամետ է կանցնենք սահմանի երբ $z \to z_0 \implies f(z) \to a_0$:

Թեորեմ 29. *Որպեսզի z_0-ն լինի որևէ կարգի բևեռ անհրաժեշտ է և բավարար, որ $z \to z_0$ դեպքում $f(z) \to \infty$:*

Ապացույց. Ապացուցենք անհրաժեշտությունը: Դիցուք z_0-ն $f(z)$-ի համար k-րդ կարգի բևեռ է $\implies f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^k}$, որտեղ $\varphi(z)$-ը անալիտիկ է և $\varphi(z_0) \neq 0$: Նշանակենք $z - z_0 = \rho e^{i\varphi} \implies |z - z_0| = \rho$: Երբ $z \to z_0 \implies \rho \to 0$ Կարող ենք գրել, որ $|f(z)| = \frac{|\varphi(z)|}{|z-z_0|^k} = \frac{|\varphi(z)|}{\rho^k} \to +\infty$
Այժմ ապացուցենք բավարարությունը: Դիցուք z_0-ն $f(z)$-ի $|f(z)| \to +\infty$, երբ $z \to z_0$, ցույց տանք, որ z_0-ն $f(z)$-ի համար որևէ կարգի բևեռ է: Ենթադրենք $|f(z)| \to \infty$ Դիտարկենք $g(z) = 1/f(z)$ ֆունկցիան, քանի որ z_0-ն $f(z)$-ի համար մեկուսացված եզակի կետ է, ապա մեկուսացված եզակի կետ է նաև $g(z)$-ի համար: $|g(z)| = 1/|f(z)| \to 0$, երբ $z \to z_0 \implies z_0$ կետը $g(z)$-ի համար վերացնելի եզակի կետ է $\implies$ կարող ենք գրել որ $g(z) = (z-z_0)^k \cdot \varphi(z)$, որտեղ $\varphi(z)$-ը անալիտիկ է z_0-ի ինչ-որ շրջակայքում և $\varphi(z_0) \neq 0$: Կարող ենք ասել, որ $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k \varphi(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^k} \cdot \frac{1}{\varphi(z)}$, քանի որ $\varphi(z_0) \neq 0 \implies \implies$ ըստ ապացուցված թեորեմի z_0 կետը հանդիսանում է k-րդ կարգի բևեռ:

39 Սոխոցկու թեորեմը:

Թեորեմ 30 (Սոխոցկի)**.** *Դիցուք $f(z)$-ը անալիտիկ է $0 < |z - z_0| < R$ փիրույթում: Եթե z_0 կետը $f(z)$ ֆունկցիայի համար էապես եզակի կետ է, ապա $\forall w$ կոմպլեքս թվի համար (անվերջ կամ վերջավոր) $\exists \{z_n\}$ հաջորդականություն ընկած $0 < |z - z_0| < R$ փիրույթում, որը ձգտում է z_0-ի երբ $n \to \infty$ և $f(z_n) \to w$:*

Անվերջ կոմպլեքս թիվ՝ $w = 1/z, \infty = 1/0, 0 = 1/\infty$:

40 Ֆունկցիայի մնացք:

Դիտարկենք $f(z)$ ֆունկցիան անալիտիկ $0 < |z - z_0| < R$-ում:

Սահմանում. *$f(z)$ ֆունկցիայի մնացք z_0 կետում անվանում ենք $\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\rho} f(z)dz$, որտեղ $0 < \rho < R$, և նշանակում ենք $\mathrm{Res}[f(z), z = z_0]$ կամ $\mathrm{Res}_{z=z_0} f(z)$:*

Քանի որ z_0-ն $f(z)$-ի համար մեկուսացված եզակի կետ է, ապա ըստ Լորանի թեորեմի

$$f(z) = \cdots + \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \ldots$$

Քանի որ (1)-ը $|z - z_0| = \rho$-ի վրա հավասարաչափ զուգամետ է և
$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\rho} \frac{dz}{(z-z_0)^k} = \begin{cases} 1, & \text{եթե } k = 1 \\ 0, & \text{եթե } k \neq 1 \end{cases}$, ապա.

$$\mathrm{Res}[f(z), z = z_0] = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z-z_0|=\rho} f(z)dz = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} a_n \int_{|z-z_0|=\rho} (z-z_0)^n dz = a_{-1}$$

Ստացվում է, որ ֆունկցիայի մնացքը հաշվելու համար պետք է հաշվել նրա Լորանի շարքի a_{-1} գործակիցը:

41 Մնացքի հաշվումը պարզ բևեռի դեպքում:

Դիցուք $z = z_0$-ն $f(z)$-ի համար պարզ բևեռ է $\implies$ կարող ենք գրել, որ $f(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots \implies (z-z_0)f(z) = a_{-1} + a_0(z-z_0) + a_1(z-z_0)^2 + \ldots$ Անցնենք սահմանի երբ $z \to z_0 \implies$ աջ մասը կձգտի a_{-1}-ի: Մնացքը հաշվելու համար ցույց տանք, որ $\mathrm{Res}[f(z), z = z_0] = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$ (նախորդ հարցից): $f(z)$-ը ներկայացնենք հետևյալ տեսքով. $f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$, որտեղ h-ը և g-ն անալիտիկ են z_0-ի շրջակայքում և $g(z) = (z - z_0)\varphi(z)$, որտեղ $\varphi(z)$-ը անալիտիկ է z_0-ի շրջակայքում և $\varphi(z_0) \neq 0$: Այդ դեպքում.

$$\mathrm{Res}[f, z = z_0] = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)\frac{h(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{h(z)}{\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}} = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}$$

Այժմ դիտարկենք այն դեպքը երբ z_0-ն պարզ բևեռ է և $f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$, որտեղ h-ը և g-ն անալիտիկ են z_0-ի շրջակայքում, $g(z_0) = 0, g'(z_0) \neq 0$: Այդ դեպքում.

$$\mathrm{Res}[f, z = z_0] = \lim_{z \to z_0} (z - z_0)\frac{h(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{h(z)}{\frac{g(z)-g(z_0)}{z-z_0}} = \frac{h(z_0)}{g'(z_0)}$$

42 Մնացքի հաշվումը k-րդ կարգի բևեռի դեպքում:

Դիցուք z_0-ն $f(z)$-ի համար k-րդ կարգի բևեռ է: Այդ դեպքում

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} + \frac{a_{-k+1}}{(z - z_0)^{k-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots$$

$$\implies (z - z_0)^k f(z) = a_{-k} + a_{-k+1}(z - z_0) + \cdots + a_{-1}(z - z_0)^{k-1} + a_0(z - z_0)^k + \ldots$$

քանի որ հավասարաչափ զուգամետ է, $k - 1$ անգամ կածանցենք և կանցնենք սահմանի.

$$a_{-1} = \lim_{z \to z_0} \frac{[(z - z_0)^k f(z)]^{(k-1)}}{(k - 1)!}$$

43 Մնացքի հաշվումը էապես եզակի կետի դեպքում:

Դիցուք z_0-ն $f(z)$-ի համար էապես եզակի կետ է: Այդ դեպքում պետք է ֆունկցիան վերլուծել Լորանի շարքի: Այժմ դիտարկենք $f(z)$ ֆունկցիան, որը անալիտիկ է $|z| > R$-ի դեպքում: Դիցուք $z = 1/t$, $f(z) = f(1/t) = \varphi(t)$, $\varphi(t)$-ն կլինի անալիտիկ 0-ի շրջակայքում, բացի 0-ից: Գրենք φ-ի համար Լորանի շարքը.

$$\varphi(t) = \cdots + \frac{a_{-n}}{t^n} + \frac{a_{-n+1}}{t^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{t} + a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \ldots$$

$$\implies f(z) = \cdots + a_{-n}z^n + a_{-n+1}z^{n-1} + \cdots + a_{-1}z + a_0 + \frac{a_1}{z} + \ldots \qquad (1)$$

I-ը կլինի Լորանի շարքի ռեգուլյար մասը, իսկ II-ը՝ գլխավոր մասը (անվերջ հեռու կետի դեպքում): Այժմ սահմանենք $f(z)$-ի մնացքը անվերջ հեռու կետում. $\mathrm{Res}[f, \infty] = -\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho} f(z)dz$, որտեղ $\rho > R$: Քանի որ (1)-ը գրված է անվերջ հեռու կետի համար, կունենանք, որ $\mathrm{Res}[f, \infty] = -a_1$: Ինչպես z_0-ի համար, այնպես էլ այստեղ տեղի ունեն բոլոր թեորեմները (անվերջ հեռու կետի համար):

44 Մնացքների հիմնական թեորեմը:

Թեորեմ 31. *Դիցուք $f(z)$-ը անալիտիկ է D-ում, բացի վերջավոր թվով մեկուսացված եզակի կետերի՝ $z_1, \ldots, z_n \in D$, և անընդհատ է D-ի փակման մինչև եզրը: Եթե ∂D-ն կտոր առ կտոր ողորկ կոր է, ապա $\int_{\partial D} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k]$:*

Ապացույց. Յուրաքանչյուր z_k կետերի շուրջ տանենք այդ կենտրոնով և ε_k շառավղով շրջանագիծ $|z - z_k| = \varepsilon_k, k = 1, \ldots, n$ և ε_k-երը այնքան փոքր են, որ շրջանագծերը չեն հատվում եզրի հետ: Ըստ Կոշի թեորեմի բազմակապ տիրույթների մասին կգրենք, որ (ի դեպ շրջանագծերը չեն հատվում նաև իրար հետ).

$$\int_{\partial D} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{|z-z_k|=\varepsilon_k} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}[f(z), z_k]$$

Թեորեմ 32. *Դիցուք $f(z)$-ը անալիտիկ է ամբողջ $\mathbb{C}$ կոմպլեքս հարթության վրա, բացի վերջավոր $z_1, \dots, z_n$ մեկուսացված եզակի կետերից: Այդ դեպքում նրա բոլոր մնացքների գումարը (ներառյալ նաև անվերջությունը) հավասար է 0-ի: $\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f(z), z_k] + \operatorname{Res}[f(z), \infty] = 0$:*

Ապացույց. Քանի որ մեկուսացված եզակի կետերի քանակը վերջավոր է, ապա $\exists R$ շառավղով շրջան 0 կենտրոնով, այնպես որ բոլոր մեկուսացված եզակի կետերը ընկած են շրջանի ներսում: Գիտենք, որ $\int_{|z|=R^-} f(z)dz + \int_{|z|=R^+} f(z)dz = 0$: Ըստ մնացքների հիմնական թեորեմի. $\int_{|z|=R^-} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f(z), z_k]$: Եվ գիտենք, որ $\operatorname{Res}[f(z), \infty] = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R^+} f(z)dz \implies$ $\implies \int_{|z|=R^+} f(z)dz = -\operatorname{Res}[f(z), \infty] \cdot 2\pi i$:

45 Մնացքների կիրառությունը որոշ իրական ինտեգրալներ հաշվելիս:

Դիտարկենք $\int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)d\varphi$ տիպի ինտեգրալը, որտեղ $R(u, v)$-ն ռացիոնալ ֆունկցիա է $\cos\varphi$ և $\sin\varphi$ նկատմամբ: Կատարենք փոփոխականի փոխարինում.
$\cos\varphi = \frac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}, \sin\varphi = \frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$, նշանակենք $z = e^{i\varphi} \implies$
$\implies dz = e^{i\varphi} \cdot id\varphi = zid\varphi \implies d\varphi = \frac{dz}{iz}, \cos\varphi = \frac{z^2+1}{2z}, \sin\varphi = \frac{z^2-1}{2iz} \implies$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\varphi, \sin\varphi)d\varphi = \int_{|z|=1} R\left(\frac{z^2+1}{2z}, \frac{z^2-1}{2iz}\right)\frac{dz}{iz}$$

Դիցուք մեկուսացված եզակի կետերն են $z_1, \dots, z_n$-եր $|z| < 1$ շրջանում $\implies$
$= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[R/z, z_k]$:

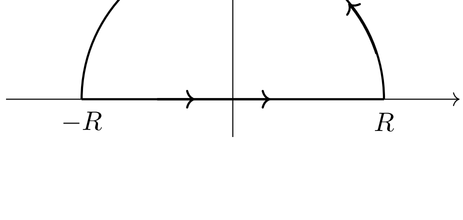
46 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ տիպի ինտեգրալների հաշվումը:

Դիցուք $f(x)$-ը անընդհատ ֆունկցիա է: Կասենք, որ $f(x)$-ը անալիտիկ շարունակվում է վերին կիսահարթության վրա, եթե $\exists f(z)$ անալիտիկ վերին կիսահարթությունում ($\operatorname{Im} z > 0$) և $f(z) = f(x)$ իրական առանցքի վրա: Օրինակ. $\frac{1}{x^2+1}$ և $\frac{1}{z^2+1}$:

Պնդում. *Դիցուք $f(x)$ ֆունկցիան անալիտիկ շարունակվում է վերին կիսահարթության վրա $f(z)$ ֆունկցիայով, որը անալիտիկ է վերին կիսահարթության մեջ, բացի վերջավոր մեկուսացված եզակի կետերի՝ $z_1, \dots, z_n$: Ենթադրենք $\exists M > 0, \exists R_0 > 0$ և $\exists\alpha > 0$, այնպես որ բոլոր z-երի համար բավարարող $|z| > R_0$ պայմանին՝ $|f(z)| < \frac{M}{|z|^{1+\alpha}}$: Այդ դեպքում $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f, z_k]$:*

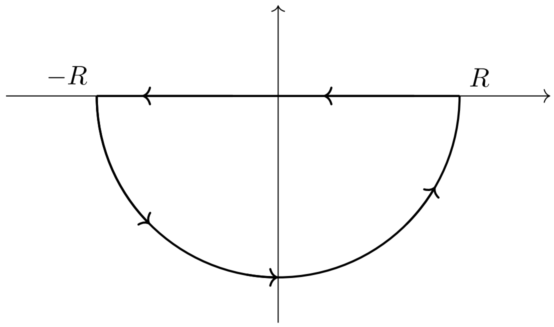
Ապացույց. Վերցնենք R-ը այնքան մեծ, որ վերին կիսահարթությունում գտնվող $z_1, z_2, \dots, z_n$ մեկուսացված եզակի կետերը ընկած լինեն $|z| < R$ շրջանում և $R > R_0$: Ըստ մնացքների հիմնական թեորեմի կարող ենք գրել, որ $\int_{\partial R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}[f(z), z_k]$: Մյուս կողմից. $\int_{\partial R} f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{|z|=R^+} f(z)dz$

$$\left|\int_{|z|=R^+} f(z)dz\right| \le \int_{|z|=R^+} |f(z)| \cdot |dz| \le \dots$$



Նշանակենք $z = Re^{i\varphi} \implies 0 \le \varphi \le \pi$, ու $|dz| = Rd\varphi \implies \le \frac{M}{R^{1+\alpha}} \int_0^\pi Rd\varphi = \frac{\pi M}{R^\alpha} \to 0$, երբ $R \to +\infty$: Երբ $R \to +\infty$ կստանանք. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[f, z_k]$:

Դիտողություն. Եթե $f(x)$-ը շարունակվում է ստորին կիսահարթության վրա վերինի փոխարեն, ապա $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = -2\pi i \sum_{k=1}^p \operatorname{Res}[f, w_k]$: Քանի որ ինտեգրալը $-\infty$-ից $+\infty$ է, ստիպված ենք շարժվել բացասական ուղղությամբ $\implies$ առաջանում է մինուս նշանը:

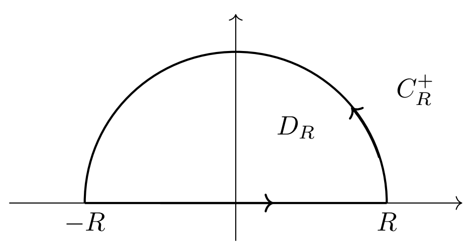


47 Ժորդանի լեմման

Լեմմա. *Դիցուք $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x)dx$ ինտեգրալում $a > 0$ իրական թիվ է, $f(x)$-ը անընդհատ է $(-\infty, +\infty)$-ում և անալիտիկ շարունակվում է վերին կիսահարթության վրա բացի վերջավոր մեկուսացված եզակի կետերի՝ $z_1, z_2, \ldots, z_n$: Դիցուք $\exists M_R$ ֆունկցիա կախված R-ից, այնպիսին որ $M_R \to 0$, երբ $R \to +\infty$ և $|f(z)| < M_R$, այսինքն եթե $z = Re^{i\varphi}, 0 \le \varphi \le \pi$, ապա վերջին պայմանը նշանակում է, որ $|f(z)|$-ը φ-ի նկատմամբ $[0, \pi]$-ում հավասարաչափ ձգտում է 0-ի: Նշված պայմանների դեպքում $\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R^+} e^{iaz} f(z)dz = 0$, որտեղ C_R^+-ը այն z-երն են, որոնց համար $|z| = R$ և $\operatorname{Im} z \ge 0$: $C_R^+ = \{z \mid |z| = R$ և $\operatorname{Im} z \ge 0\}$:*

Թեորեմ 33. *Դիցուք $f(z)$-ը բավարարում է վեր նշված պայմաններին: Այդ դեպքում $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[e^{iaz} f(z), z_k]$:*

Ապացույց. D_R-ով նշանակենք հետևյալ կոնտուրով սահմանափակված տիրույթը. $\{y = 0, -R \le x \le R\} \cup \{|z| = R, \operatorname{Im} z \ge 0\}$: Վերցնենք R-ը այնքան մեծ, որ բոլոր մեկուսացված եզակի կետերը պատկանեն D_R-ին: Ըստ մնացքների հիմնական թեորեմի. $\int_{\partial D_R} e^{iaz} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[e^{iaz} f(z), z_k]$: Մյուս կողմից. $\int_{\partial D_R} e^{iaz} f(z)dz = \int_{-R}^{R} e^{iax} f(x)dx + \int_{C_R^+} e^{iaz} f(z)dz$: Ըստ Ցորդանի լեմմայի երբ $R \to +\infty, \int_{C_R^+} e^{iaz} f(z)dz \to 0$:



Ունենք $2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[e^{iaz} f(z), z_k] = \int_{-R}^{R} e^{iax} f(x)dx + \int_{C_R^+} e^{iaz} f(z)dz \implies \implies$ երբ $R \to +\infty, \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[e^{iaz} f(z), z_k]$: □

Դիտողություն. Եթե $a < 0$, ապա ենթադրում ենք, որ $f(x)$-ը անալիտիկ շարունակվում է ստորին կիսահարթության վրա, բացի վերջավոր $z_1, \ldots, z_n$ մեկուսացված եզակի կետերից և հավասարաչափ φ-ի նկատմամբ $|f(z)| \to 0$ երբ $R \to +\infty$: $z = Re^{i\varphi}, \varphi \in [\pi, 2\pi]$: Այդ դեպքում $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x)dx = -2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[e^{iaz} f(z), z_k]$:

48 Լոգարիթմական մնացք:

Դիտարկենք $f(z)$ ֆունկցիան անալիտիկ D-ում, բացի վերջավոր $a_1, a_2, \dots, a_p$ մեկուսացված եզակի կետերի: Դիցուք $f(z)$-ը անընդհատ է ընդհուպ մինչև եզրը, որը կտոր առ կտոր ողորկ է: Նշանակենք $b_1, b_2, \dots, b_q$-ով $f(z)$-ի զրոները D փիրույթում (ընդ որում եզրի վրա զրո չկա և մեկուսացված կետ չկա, քանի որ ֆունկցիան անընդհատ է):

Դիտարկենք $\int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ ինտեգրալը: Հեշտ է տեսնել, որ $\frac{f'(z)}{f(z)} = (\operatorname{Log} f(z))'$:

Թեորեմ 34. *Եթե $f(z)$ ֆունկցիան բավարարում է վեր նշված պայմաններին և m_k-ն a_k բևեռի կարգն է, իսկ n_j-ն b_j զրոյի կարգն է, ապա*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - M,$$

որտեղ $N = n_1 + n_2 + \dots + n_q$ և $M = m_1 + m_2 + \dots + m_p$:

Ապացույց. Նախ ասենք, որ D-ում զրոները վերջավոր են, քանի որ հակառակ դեպքում ըստ միակության թեորեմի ֆունկցիան կլիներ նույնաբար զրո:
Նշանակենք $H(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$: Պարզ է, որ a_k կետերը և b_j կետերը $H(z)$-ի համար կլինեն մեկուսացված եզակի կետեր:
Դիտարկենք b_j-ի նկատմամբ Լորանի շարքը: Քանի որ այն ըստ պայմանի n_j-րդ կարգի զրո է, ապա $H(z)$-ի համար կլինի n_j-րդ կարգի բևեռ: Այսինքն b_j-ի որևէ շրջակայքում. $f(z) = (z - b_j)^{n_j} \varphi_j(z)$, որտեղ $\varphi_j(z)$-ը անալիտիկ է և $\varphi_j(b_j) \neq 0$:
$f'(z) = n_j (z - b_j)^{n_j - 1} \varphi_j(z) + (z - b_j)^{n_j} \varphi_j'(z) \implies$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{n_j (z - b_j)^{n_j - 1} \varphi_j(z)}{(z - b_j)^{n_j} \varphi_j(z)} + \frac{(z - b_j)^{n_j} \varphi_j'(z)}{(z - b_j)^{n_j} \varphi_j(z)} = \frac{n_j}{z - b_j} + \frac{\varphi_j'(z)}{\varphi_j(z)} :$$

Ունենք, որ $\frac{\varphi_j'(z)}{\varphi_j(z)}$ ֆունկցիան անալիտիկ է $\implies$ վերածվում է Թեյլորի շարքի $\implies$ Լորանի շարքում $a_{-1} = 0 \implies$ այս ֆունկցիայի մնացքը b_j-ում 0 է: $\implies \operatorname{Res}[\frac{f'(z)}{f(z)}, b_j] = \operatorname{Res}[\frac{n_j}{z - b_j}, b_j] = n_j$:
Դիտարկենք a_k կետերը՝ $f(z)$-ի m_k-րդ կարգի բևեռ է: $\implies f(z) = \frac{\psi_k(z)}{(z - a_k)^{m_k}}$ a_k-ի որևէ շրջակայքում, որտեղ $\psi_k(z)$-ը անալիտիկ է և $\psi_k(a_k) \neq 0$:

$$f'(z) = \frac{\psi_k'(z)(z - a_k)^{m_k} - \psi_k(z) m_k (z - a_k)^{m_k - 1}}{(z - a_k)^{2m_k}} \implies$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{(z - a_k)^{m_k}}{\psi_k(z)} \cdot \frac{\psi_k'(z)(z - a_k)^{m_k} - m_k \psi_k(z)(z - a_k)^{m_k - 1}}{(z - a_k)^{2m_k}} = \frac{\psi_k'(z)}{\psi_k(z)} - \frac{m_k}{z - a_k}$$

$\implies \operatorname{Res}[\frac{f'(z)}{f(z)}, a_k] = -m_k$
Ըստ մնացքների հիմնական թեորեմի.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^{q} \operatorname{Res}[f'/f, b_j] + \sum_{k=1}^{p} \operatorname{Res}[f'/f, a_k] = \sum_{j=1}^{q} n_j - \sum_{k=1}^{p} m_k = N - M$$

Մասնավոր դեպքում, եթե $f(z)$-ը չունի մեկուսացված եզակի կետեր D-ում, ապա $M = 0$, և կստանանք $\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N$, որտեղ n_j զրոների քանակն է հաշված իրենց պատիկություններով:

49 Արգումենտի սկզբունքը

Դիցուք $f(z)$-ը անալիտիկ է D-ում և չունի մեկուսացված եզակի կետեր: Ըստ նախորդ հարցի թեորեմի կունենանք, որ՝

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} d(\operatorname{Ln} f(z)) :$$

Դիցուք ∂D եզրը տրվում է $z(t) = x(t) + iy(t)$ հավասարմամբ, որտեղ $\alpha \le t \le \beta$: Ունենք՝

$$\begin{aligned}\operatorname{Ln} f(z) &= \ln|f(z)| + i \arg f(z) + i \cdot 2\pi k \\ &= \ln|f(z)| + i \operatorname{Arg} f(z) :\end{aligned}$$

Տեղադրելով ինտեգրալի մեջ՝ կստանանք.

$$N = \frac{1}{2\pi i} \ln|f(z(t))|\Big|_{\alpha}^{\beta} + \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} d \operatorname{Arg} f(z) :$$

Քանի որ $z(\alpha) = z(\beta)$, ապա $\ln|f(z(\alpha))| = \ln|f(z(\beta))|$: Հետևաբար՝

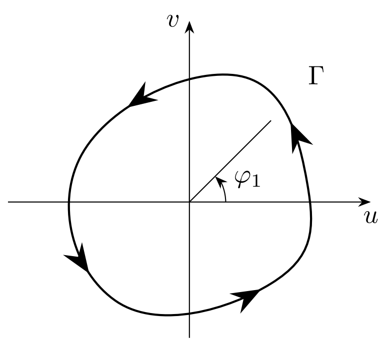
$$N = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} d \operatorname{Arg} f(z) :$$

Պարզ է, որ $w = f(z)$-ը ∂D-ն արտապատկերում է որևէ Γ փակ կորի վրա (քանի որ $f(z)$-ը անընդհատ է ընդհուպ մինչև եզրը): Γ-ի համար հնարավոր են հետևյալ երկու դեպքերը.

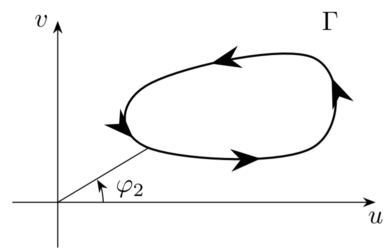
ա) Γ-ի ներսում է գտնվում 0 կետը,

բ) 0-ն չի պատկանում Γ-ով սահմանափակված տիրույթին:

ա)



բ)



բ) դեպքում ∂D-ի երկայնքով սկզբից մինչև վերջ շարժվելիս կպտտվենք Γ-ի երկայնքով, վերջում հայտնվելով նույն տեղում և φ_2-ը արժեքը փոխած չի լինի $\implies$ արգումենտը՝ $\operatorname{Arg} f(z)$-ը արժեքը փոխած չի լինի և ինտեգրալը հավասար կլինի զրոյի:
Այսուհետ կօգտագործենք հետևյալ նշանակումը $f(z)$-ի փոփոխության համար.

$$\operatorname{Var}_{\partial D} f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} d(\operatorname{Arg} f(z)) :$$

Տվյալ դեպքում կունենանք, որ $\operatorname{Var} f(z) = 0$:
ա) դեպքում Γ-ի երկայնքով մեկ պտույտ կատարելուց հետո φ_1-ը կմեծանա 2π-ով՝ կդառնա $\varphi_2 + 2\pi$:

$$\operatorname{Var}_{\partial D} f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D} d(\operatorname{Arg} f(z)) = N :$$

N-ը ցույց է տալիս, թե ∂D-ով ինտեգրելու դեպքում քանի անգամ ենք պտտվում Γ կորով 0 կետի շուրջը (եթե բ դեպքն է՝ չենք պտտվում 0 կետի շուրջը $\implies$ ինտեգրալը 0 է):

50 Ռուշեի թեորեմը:

Գիտենք, որ $f(z) \cdot g(z)$-ի համար $\operatorname{Arg} f \cdot g = \operatorname{Arg} f + \operatorname{Arg} g$:

Թեորեմ 35 (Ռուշե)**.** *Դիցուք $f(z)$ և $g(z)$ ֆունկցիաները անալիտիկ են D տիրույթում և $|f(z)|_{\partial D} > |g(z)|_{\partial D}$: Այդ դեպքում $f(z)$ ֆունկցիայի զրոների քանակը D-ում հավասար է $f(z)+g(z)$ ֆունկցիայի զրոների քանակին (նույն 0-ները չեն, քանակն է նույնը):*

Ապացույց. Նախ $|f(z)|_{\partial D} > |g(z)|_{\partial D}$ պայմանից հետևում է, որ ∂D-ի վրա $f(z)$-ը չունի զրո: Կարող ենք գրել, որ $N_f = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Var} \operatorname{Arg}(f(z)) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} d \operatorname{Arg} f(z)$: Մյուս կողմից կարող ենք գրել, որ $N_{f+g} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Var} \operatorname{Arg}(f+g) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} d \operatorname{Arg}(f(1+g/f)) = = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Var} \operatorname{Arg} f(z) + \frac{1}{2\pi} \operatorname{Var} \operatorname{Arg}(1+g(z)/f(z)) \implies \implies N_{f+g} - N_f = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Var} \operatorname{Arg}(1+g(z)/f(z))$: Ցույց տանք, որ սա հավասար է զրոյի: Դիտարկենք $w^* = 1+g(z)/f(z)$ ֆունկցիան և $|w-1| < 1$ շրջանում: Դիցուք $z \in \partial D \implies \implies$ թեորեմի պայմանից ստանում ենք, որ w^*-ը ընկած է $|w-1| < 1$ շրջանի ներսում: Սա նախորդ հարցում նկարագրված բ) դեպքն է, այսինքն արգումենտը չի փոփոխվում երբ z-ը ∂D-ով կատարում է մեկ լրիվ պտույտ: $\implies \operatorname{Var} \operatorname{Arg}(1+g(z)/f(z)) = 0 \implies N_{f+g} = N_f$: